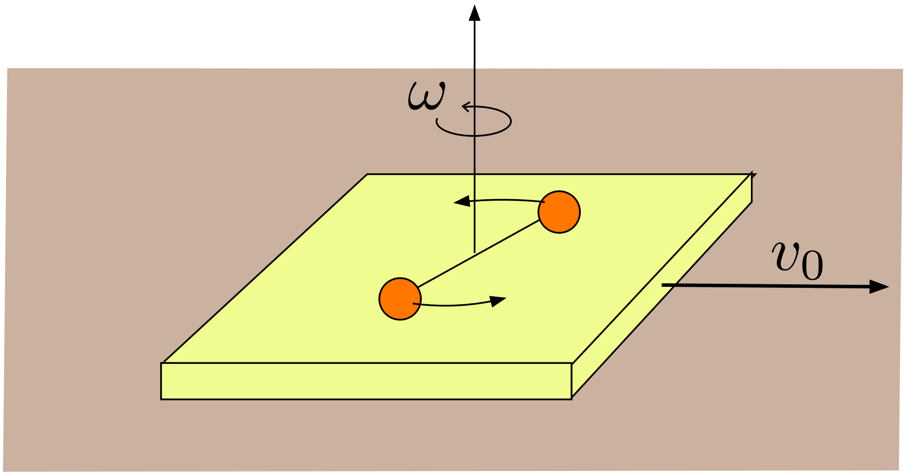
Esercizio (tratto dal problema 6.17 del Mazzoldi 2)

Due punti materiali di uguale massa $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ sono posti agli estremi di una sottile asta rigida di massa trascurabile e lunghezza $2R = 40\,\mathrm{cm}$, e ruotano in un piano orizzontale con velocità angolare costante $\omega = 10\,\mathrm{s}^{-1}$ rispetto al centro dell'asta. Il sistema è montato sopra una piattaforma a cuscino d'aria che si muove con velocità $v_0 = 0.8\,\mathrm{m/s}$ lungo un piano orizzontale. Calcolare:

1. l'energia cinetica del sistema dei due punti
2. il momento angolare relativo al centro di massa



SOLUZIONE

Dati iniziali:

$$\begin{aligned} R &= 0.2\,\mathrm{m} \\ m &= 0.5\,\mathrm{kg} \\ \omega &= 10\,\mathrm{s}^{-1} \\ v_0 &= 0.8\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

1. L'energia cinetica (rispetto al laboratorio) si scrive utilizzando il teorema di König

$$\underbrace{E_k}_{\text{energia cinetica rispetto al lab.}} = \underbrace{\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2}_{\text{energia cinetica del CM}} + \underbrace{E'_k}_{\text{energia cinetica rispetto al CM}} \tag{1}$$

- Calcoliamo l'energia cinetica del CM. Il centro di massa si trova al centro dell'asta, e si muove dnque solidalmente alla zattera con velocità v_0. Per cui

$$\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2 = \frac{1}{2}\,2m\,v_0^2 = mv_0^2 \tag{2}$$

- Per calcolare l'energia cinetica E'_k rispetto al CM possiamo procedere in due modi:

Primo modo
Relativamente al CM le due masse si muovono di moto circolare uniforme, per cui

$$|\vec{v}'_1| = \omega R \tag{3}$$
$$|\vec{v}'_2| = \omega R \tag{4}$$

da cui

$$\begin{aligned} E'_k &= \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\prime 2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\prime 2} = \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2 = \\ &= m\omega^2R^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Secondo modo
Siccome il CM si strova sull'asse di rotazione, l'energia cinetica rispetto al CM si può anche scrivere come

$$E'_k = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{6}$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, e vale

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i d_i^2 = \\ &= mR^2 + mR^2 = \\ &= 2mR^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Sostituendo (7) in (6) otteniamo

$$\begin{aligned} E'_k &= \frac{1}{2}\,2mR^2\,\omega^2 = \\ &= m\omega^2R^2 \end{aligned} \tag{8}$$

che coincide con (5)

- Sostituendo (2) e (5) in (1) otteniamo

$$\begin{aligned} E_k &= m v_0^2 + m\omega^2 R^2 = \\ &= m\left(v_0^2 + \omega^2 R^2\right) \end{aligned} \tag{9}$$

  Sostituendo i dati abbiamo

$$\begin{aligned} E_k &= 0.5\,\mathrm{kg}\left(\left(0.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \frac{100}{\mathrm{s}^2}0.2^2\,\mathrm{m}^2\right) = \\ &= 0.32\,\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2} \;+\; 2\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 2.32\,\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 2.32\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{10}$$

2. Il momento angolare $\vec{L}'$ rispetto al CM può calcolarsi in due modi:

   Primo modo
   Per definizione $\vec{L}'$ è dato da

$$\begin{aligned} \vec{L}' &= \sum_i \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_i{}' = \\ &= \underbrace{\vec{r}_1{}' \times m\vec{v}_1{}'}_{=\vec{L}_1'} + \underbrace{\vec{r}_2{}' \times m\vec{v}_2{}'}_{=\vec{L}_2'} \end{aligned} \tag{11}$$

   dove $\vec{r}_i{}'$ e $\vec{v}_i{}'$ sono le posizioni e le velocità rispetto al CM, come mostrate in Fig.1

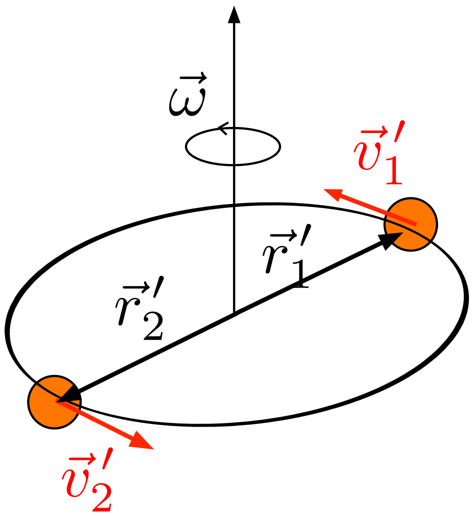


Figure 1:

- Dato che $\vec{r}_i{}'$ e $\vec{v}_i{}'$ giacciono sul piano della zattera, il momento angolare (prodotto vettoriale) è diretto ortogonalmente al piano della zattera. Il verso si ottiene con la regola della mano destra. Ad esempio per $\vec{L}_1'$, i) *trasporto anzitutto il vettore $\vec{v}_1{}'$ parallelamente fino a che la sua coda coincida con la coda di $\vec{r}_1{}'$*, ii) andando con la mano destra vado dal primo vettore al secondo vedo che il pollice punta verso l'alto. Dunque $\vec{L}_1'$ è diretto verso l'alto. Per $\vec{L}_2'$ trovo la stessa direzione. Pertanto

$$\vec{L}_i' = |\vec{L}_i'|\,\hat{k} \qquad i = 1, 2 \tag{12}$$

con

$$\begin{aligned}
|\vec{L}_i'| &= |\vec{r}_i'|\, m\, |\vec{v}_i'|\, \underbrace{\sin\theta}_{=1} = \\
&= R\, m\, \omega R = \\
&= m\omega R^2
\end{aligned} \tag{13}$$

da cui

$$\vec{L}' = \vec{L}_1' + \vec{L}_2' = 2m\omega R^2\, \hat{k} \tag{14}$$

con

$$\begin{aligned}
L' &\doteq |\vec{L}'| = 2m\omega R^2 = \\
&= 2 \cdot 0.5\,\text{kg}\,\frac{10}{\text{s}}\,(0.2\,\text{m})^2 = \\
&= 10 \cdot 0.04\,\text{kg}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}} = \\
&= 0.4\,\text{kg}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Secondo modo
Siccome il CM si strova sull'asse di rotazione, il momento angolare rispetto al CM si può anche scrivere come

$$\vec{L}' = I\vec{\omega} \qquad \vec{\omega} = \omega\hat{k} \tag{16}$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, e vale [vedi (7)]

$$I = 2mR^2 \tag{17}$$

Pertanto

$$\vec{L}' = 2m\omega R^2\, \hat{k} \tag{18}$$

in accordo con la (14).