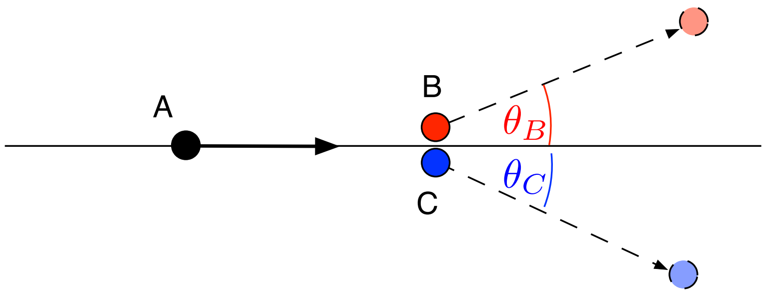
Esercizio (tratto dal Problema 8.13 del Mazzoldi 2)

Due punti materiali B e C a contatto, di massa m, vengono urtati elasticamente da un terzo punto A di pari massa, che si muove lungo la direzione x con velocità $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$. Dopo l'urto la velocità del punto A è lungo l'asse x, mentre B e C si muovono lungo due direzioni, che formano un angolo $\theta_B = 30^o$ e $\theta_C = 30^o$ con tale asse. Calcolare le velocità dei tre punti dopo l'urto.



SOLUZIONE

- **conservazione della quantità di moto**
  Dato che nell'urto si sviluppano solo forze interne al sistema delle tre masse, la quantità di moto totale si conserva nel tempo (e dunque in particolare si conserva attraverso l'urto):

$$\begin{aligned} \vec{P}(\text{prima}) &= \vec{P}(\text{dopo}) \\ &\Downarrow \\ P_x(\text{prima})\hat{u}_x + P_y(\text{prima})\hat{u}_y &= P_x(\text{dopo})\hat{u}_x + P_y(\text{dopo})\hat{u}_y \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P_x(\text{prima}) = P_x(\text{dopo}) \\ \\ P_y(\text{prima}) = P_y(\text{dopo}) \end{cases} \tag{1}$$

ossia

$$\begin{cases} mv_0 = mv_A^{\text{dopo}} + m\,v_{B,x}^{\text{dopo}} + m\,v_{C,x}^{\text{dopo}} \\ \\ 0 = m\,v_{B,y}^{\text{dopo}} + m\,v_{C,y}^{\text{dopo}} \end{cases} \tag{2}$$

Denotando $v_B^{\text{dopo}} = |\vec{v}_B^{\,\text{dopo}}|$ e $v_C^{\text{dopo}} = |\vec{v}_C^{\,\text{dopo}}|$ e ricordando che $\theta_B = \theta_C = \pi/6$ si ha

$$\begin{cases} mv_0 = mv_A^{\text{dopo}} + mv_B^{\text{dopo}}\underbrace{\cos\theta_B}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} + mv_C^{\text{dopo}}\underbrace{\cos\theta_C}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} = m\left(v_A^{\text{dopo}} + \frac{\sqrt{3}}{2}(v_B^{\text{dopo}} + v_C^{\text{dopo}})\right) \\ \\ 0 = 0 + mv_B^{\text{dopo}}\underbrace{\sin\theta_B}_{=\frac{1}{2}} - mv_C^{\text{dopo}}\underbrace{\sin\theta_C}_{=\frac{1}{2}} = m\frac{1}{2}(v_B^{\text{dopo}} - v_C^{\text{dopo}}) \end{cases} \tag{3}$$

Dalla seconda relazione cui si ottiene otteniamo $v_B^{\text{dopo}} = v_C^{\text{dopo}}$ che possiamo sostituire nella prima. In conclusione abbiamo

$$\begin{cases} v_B^{\text{dopo}} = v_C^{\text{dopo}} \\ v_0 = v_A^{\text{dopo}} + \sqrt{3}\,v_B^{\text{dopo}} \end{cases} \tag{4}$$

- **conservazione dell'energia cinetica**
  Il testo dice che l'urto è elastico, e dunque l'energia cinetica si conserva nel tempo (e dunque in particolare attraverso l'urto):

$$\begin{aligned} E_k(\text{prima}) &= E_k(\text{dopo}) \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m(v_A^{\text{dopo}})^2 + \frac{1}{2}m(v_B^{\text{dopo}})^2 + \frac{1}{2}m(v_C^{\text{dopo}})^2 \\ &\Downarrow \quad [\text{uso } v_B^{\text{dopo}} = v_C^{\text{dopo}} \text{ dalla (4)}] \\ v_0^2 &= {v_A^{\text{dopo}}}^2 + 2{v_B^{\text{dopo}}}^2 \end{aligned} \tag{5}$$

La seconda delle equazioni (4) e l'Eq.(5) costituiscono un sistema di due equazioni per le due incognite v_A^{dopo} e v_B^{dopo}

$$\begin{cases} v_0 = v_A^{\text{dopo}} + \sqrt{3}\,v_B^{\text{dopo}} & \to \quad v_A^{\text{dopo}} = v_0 - \sqrt{3}\,v_B^{\text{dopo}} \\ \\ v_0^2 = {v_A^{\text{dopo}}}^2 + 2{v_B^{\text{dopo}}}^2 & \to \quad v_0^2 = (v_0 - \sqrt{3}\,v_B^{\text{dopo}})^2 + 2{v_B^{\text{dopo}}}^2 \end{cases} \tag{6}$$

– Dalla seconda equazione (6) otteniamo

$$\begin{aligned} v_0^2 &= v_0^2 - 2\sqrt{3}\, v_0\, v_B^{\text{dopo}} + 5 {v_B^{\text{dopo}}}^2 \\ &\Downarrow \\ 0 &= v_B^{\text{dopo}} \, (5 v_B^{\text{dopo}} - 2\sqrt{3}\, v_0) \end{aligned} \tag{7}$$

Scartando la soluzione $v_B^{\text{dopo}} = 0$ (il testo dice che B e C si muovono dopo l'urto), si ottiene

$$v_B^{\text{dopo}} = v_C^{\text{dopo}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\, v_0 \tag{8}$$

e sostituendo i dati

$$v_B^{\text{dopo}} = v_C^{\text{dopo}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\, 5\, \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3.46\, \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{9}$$

– Sostituendo nella prima equazione (6) otteniamo

$$v_A^{\text{dopo}} = v_0 - \sqrt{3}\, v_B^{\text{dopo}} = v_0 (1 - \sqrt{3}\, \frac{2\sqrt{3}}{5}) = -\frac{1}{5} v_0 \tag{10}$$

e sostituendo i dati

$$v_A^{\text{dopo}} = -\frac{1}{5} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -1\, \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{11}$$

ossia la massa A torna indietro lungo l'asse x.