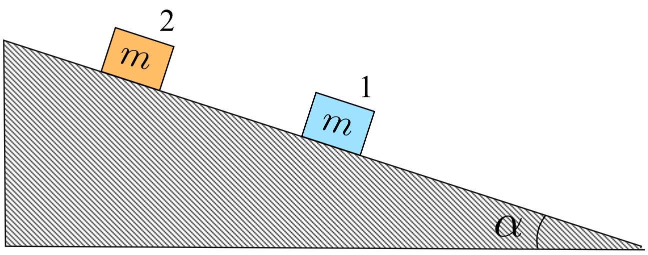
Esercizio (tratto dal Problema 41 del Mazzoldi)

Lungo un piano inclinato di $\alpha = 30^o$ vengono fatti scendere due cubi di ugual massa $m = 2\,\mathrm{kg}$ con diverso coefficiente di attrito dinamico col piano: $\mu_1 = 0.4$ per quello a valle e $\mu_2 = 0.2$ per quello a monte. I cubi, inizialmente fermi e distanti $d = 1\,\mathrm{m}$ l'uno dall'altro lungo il piano, vengono liberati simultaneamente all'istante $t = 0$ e iniziano a scendere. Calcolare:

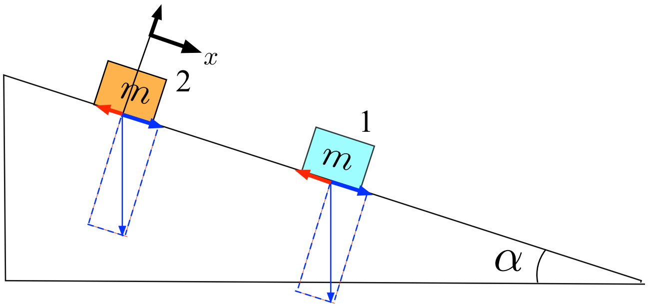
1. dopo quanto tempo si urtano;
2. la velocità del sistema immediatamente dopo il contatto, sapendo che i due cubi rimangono attaccati;
3. l'accelerazione con cui scende il sistema dopo l'urto;
4. la forza $F_{2\to 1}$ che il cubo a monte esercita su quello a valle



SOLUZIONE

Dati noti:
$m = 2\,\text{kg}$
$\mu_1 = 0.4$
$\mu_2 = 0.2$
$d = 1\,\text{m}$
$\alpha = \pi/6$

1. **MOTO PRIMA DELL'URTO**
Prima dell'urto i due cubi non esercitano alcuna forza l'uno sull'altro ($F_{2\to 1} = F_{1\to 2} = 0$)



- Scegliamo due assi, uno ortogonale al piano ed uno diretto lungo il piano (che indichiamo con x), orientato verso valle con l'origine $x = 0$ posta nella posizione iniziale del corpo 2 a monte. Non c'è alcuno moto nella direzione ortogonale al piano, dato che in quella direzione entrambi i corpi rimangono sempre fermi. Tutto il moto avviene lungo il piano. Pertanto, per ciascun corpo ($i = 1, 2$), considereremo solo la componente lungo il piano della seconda legge della dinamica $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$ (con $i = 1, 2$).

- Le forze che agiscono su ciascun corpo lungo il piano sono
-la componente longitudinale della forza peso (diretta a valle);
-la forza di attrito dinamico (diretta a monte)

Le equazioni della dinamica per i due corpi lungo il piano si riducono pertanto a

$$mg\sin\alpha - \mu_1 mg\cos\alpha = m\,a_1 \tag{1}$$
$$mg\sin\alpha - \mu_2 mg\cos\alpha = m\,a_2 \tag{2}$$

da cui si ricavano le accelerazioni

$$\begin{cases} a_1 = g\,(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) \\ a_2 = g\,(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) \end{cases} \tag{3}$$

Siccome le accelerazioni sono costanti, si tratta di due moti rettilinei uniformemente accelerati, con velocità iniziali dei due corpi pari a

$$\begin{cases} v_{01} = v_1(t=0) = 0 \\ v_{02} = v_2(t=0) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

e posizioni iniziali lungo il piano pari a

$$\begin{cases} x_{01} = x_1(t=0) = d \\ x_{02} = x_2(t=0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Pertanto le leggi orarie dei due corpi sono

$$\begin{cases} x_1(t) &= d + \frac{1}{2} a_1 t^2 \\ \\ x_2(t) &= \frac{1}{2} a_2 t^2 \end{cases} \tag{6}$$

- Dalle (6) possiamo ricavare anche le leggi orarie delle velocità (prima dell'urto)

$$\begin{cases} v_1(t) &= \dfrac{dx_1}{dt} = a_1\, t = g\,(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)\; t \\ \\ v_2(t) &= \dfrac{dx_2}{dt} = a_2\, t = g\,(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha)\; t \end{cases} \tag{7}$$

e dunque delle quantità di moto

$$\begin{cases} p_1(t) &= m v_1(t) = mg\,(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)\; t \\ \\ p_2(t) &= m v_2(t) = mg\,(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha)\; t \end{cases} \qquad \text{(prima dell'urto)} \tag{8}$$

Entrambe crescono linearmente nel tempo. Tuttavia, essendo $\mu_1 > \mu_2$, la quantità di moto del corpo a valle cresce più lentamente nel tempo di quella del corpo a monte, e dunque quest'ultimo lo raggiunge.

- Denotiamo con t_u l'istante in cui i due corpi si urtano: in tale istante le loro coordinate assumono lo stesso valore.

$$\begin{aligned} x_1(t_u) &= x_2(t_u) \\ &\Downarrow \qquad\qquad [\text{uso (6)}] \\ d + \frac{1}{2} a_1\, t_u^2 &= \frac{1}{2} a_2\, t_u^2 \\ &\Downarrow \\ d &= \frac{1}{2} (a_2 - a_1)\, t_u^2 \end{aligned} \tag{9}$$

da cui

$$\begin{aligned} t_u &= \sqrt{\frac{2d}{a_2 - a_1}} = \qquad [\text{uso (3)}] \\ &= \sqrt{\frac{2d}{(\mu_1 - \mu_2) g \cos\alpha}} \end{aligned} \tag{10}$$

Sostituendo i dati

$$t_u = \sqrt{\frac{2 \cdot 1\,\cancel{\mathrm{m}}}{(0.4 - 0.2)\, 9.81\, \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2} \frac{\sqrt{3}}{2}}} = 1.09\,\mathrm{s} \tag{11}$$

2. **MOTO DURANTE E DOPO L'URTO**
Consideriamo i due cubi come un sistema di due punti materiali che si muovono lungo il piano. Prima dell'urto i corpi sono staccati e su ciascuno agisce la componente longitudinale della forza peso e la forza di attrito. Durante l'urto e dopo l'urto ciascuno esercita sull'altro una forza (di deformazione plastica).

- **Classificazione delle forze interne/esterne**
  Classifichiamo le forze in base al fatto se siano interne o esterne al sistema costituito dai due corpi. Le forze interne agenti su uno dei due corpi sono quelle dovute all'altro corpo, mentre le forze esterne sono quelle dovute ad agenti esterni al sistema delle due masse.
  - la forza $mg \sin\alpha$ è la (componente longitudinale della) forza peso su ciascun corpo (forze dovute all'agente esterno = Terra);
  - le forze $\mu_1 mg\cos\alpha$ e $\mu_2 mg\cos\alpha$ sono le forze di attrito dinamico (forze dovute all'agente esterno = piano inclinato);
  - la forza $F_{2\to1}$ è la forza che 2 esercita su 1 (forza interna, presente durante e dopo l'urto);
  - la forza $F_{1\to2}$ è la forza che 1 esercita su 2 (forza interna, presente durante e dopo l'urto);

- **Il sistema è isolato?**
  Dato che su ciascuno dei due corpi agiscono anche delle forze esterne, ossia la forza peso (dovuta alla Terra) e la forza di attrito (dovuta al piano), il sistema dei due corpi *non è isolato*. La quantità di moto varia secondo la legge

$$\frac{dP}{dt} = \sum F_{ext} = \underbrace{2mg\sin\alpha - (\mu_1+\mu_2)mg\cos\alpha}_{\text{somma forze esterne}} \tag{12}$$

  In particolare il membro destro della (12) mostra che la derivata di P è una costante. Pertanto la quantità di moto totale varia linearmente nel tempo

$$P(t) = \underbrace{P(t=0)}_{=0} + (2mg\sin\alpha - (\mu_1+\mu_2)mg\cos\alpha)\ t$$

$$\rightarrow \quad \boxed{P(t) = 2mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right)\ t} \tag{13}$$

  ossia la quantità di moto totale P cresce linearmente col tempo (vedi Fig.2), come mostrato in Fig.1

- **La quantità di moto totale si conserva nel tempo?**
  (ossia: rimane costante nel tempo?)
  La risposta è NO, dato che il sistema dei due corpi 1 e 2 non è isolato. Pertanto, come si vede esplicitamente dalla (13), la quantità di moto totale $P = p_1 + p_2$ varia nel tempo a seguito della presenza di forze esterne e dunque NON si conserva.

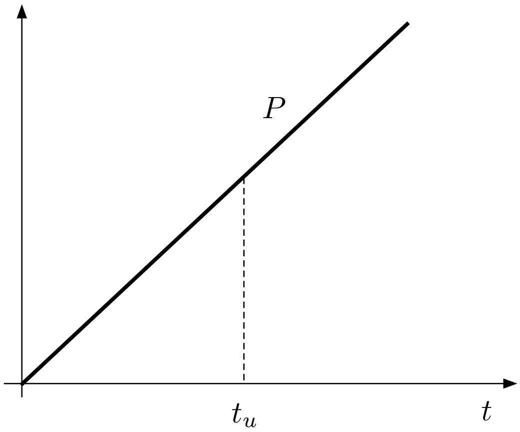


Figure 1: Il sistema non è isolato e la quantità di moto totale cresce linearmente nel tempo, ma senza subire alcun salto all'istante t_u dell'urto.

- **La quantità di moto totale si conserva attraverso l'urto ?**
  (ossia: P è continua o subisce discontinuità tra immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto?).
  Indicando con t_u l'istante in cui avviene l'urto

$$\underbrace{P(t_u - \epsilon)}_{\substack{\text{immediatamente} \\ \text{prima dell'urto}}} = \underbrace{P(t_u + \epsilon)}_{\substack{\text{immediatamente} \\ \text{dopo l'urto}}} \quad ? \tag{14}$$

  La risposta è SÌ. Infatti, come si vede dall'Eq.(13), la funzione $P(t)$ è *continua* (senza salti), e possiamo pertanto scrivere

$$P(t_u + \epsilon) = P(t_u - \epsilon) = P(t_u) = 2mg \left(\sin\alpha - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \cos\alpha \right) t_u \tag{15}$$

  Osservazione: In presenza di urti ciò che importa è se una certa quantità si conserva attraverso l'urto (=se è continua), piuttosto che se 'si conserva in senso assoluto' (= se rimane sempre costante nel tempo). La seconda condizione è certamente sufficiente per affermare che la prima vale (= se una funzione è costante, in particolare è continua all'istante t_u dell'urto), ma non è necessaria (=una funzione può variare nel tempo pur variando in maniera continua, senza salti).

  Quando ci sono forze esterne ($\sum F^{ext} \neq 0$) la quantità di moto NON si conserva (varia nel tempo). Tuttavia se tali forze esterne *non sono impulsive* (il peso, la forza di attrito, la forza elastica non sono impulsive) la quantità di moto varia sì nel tempo, ma in maniera continua, ossia senza subire salti all'istante dell'urto [vedi Fig.1]. Questo è ciò che interessa sapere per risolvere i problemi con gli urti.

3. **Velocità immediatamente dopo l'urto**
   Dopo l'urto i due corpi proseguono insieme attaccati come un unico corpo di massa $m+m = 2m$. Possiamo ora sfruttare la conservazione della quantità di moto attraverso l'urto [vedi Eq.(15)] per determinare la velocità $v(t_u + \epsilon)$ con cui essi si muovono immediatamente dopo l'urto. Tale velocità è determinata da

$$P(t_u + \epsilon) = (m + m)\, v(t_u + \epsilon) \tag{16}$$

e dunque

$$\begin{aligned} v(t_u+\epsilon) &= \frac{1}{2m} P(t_u+\epsilon) = \\ & \quad \text{[sfrutto l'Eq.(15)]} \\ &= \frac{1}{2m} P(t_u) = \\ &= g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right) t_u \end{aligned} \tag{17}$$

Sostituendo i valori e ricordando la (11) si ottiene

$$\begin{aligned} v(t_u+\epsilon) &= 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{0.4+0.2}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 1.09\,\mathrm{s} = \\ &= 2.36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\cancel{2}}} \times 1.09\cancel{\mathrm{s}} = \\ &= 2.57\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{18}$$

4. **Accelerazione con cui scende il sistema**
Dopo l'urto i due corpi proseguono attaccati l'uno all'altro come un unico corpo di massa $2m$, e dunque il centro di massa si muove solidalmente ad essi. Pertanto l'accelerazione con cui scende il sistema dopo l'urto è data proprio dall'accelerazione del centro di massa

$$a_{dopo} = a_{CM} \tag{19}$$

Per determinare il moto del centro di massa possiamo sfruttare l'andamento della quantità di moto totale (13). Infatti

- La velocità del centro di massa è legata alla quantità di moto totale dalla relazione

$$P(t) = M v_{CM}(t) = 2m v_{CM}(t) \qquad \Rightarrow \qquad v_{CM} = \frac{P(t)}{2m}$$

- L'accelerazione del centro di massa è legata alla quantità di moto totale dalla relazione

$$\frac{dP}{dt} = M\,a_{CM} = 2m a_{CM}(t) \qquad \Rightarrow \qquad a_{CM} = \frac{1}{2m}\frac{dP}{dt} \tag{20}$$

Dalla (13)

$$a_{CM} = \frac{1}{2m}\cdot 2mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right) = g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right) \tag{21}$$

Sostituendo i dati, otteniamo

$$a_{CM} = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{0.4+0.2}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2.36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{22}$$

Pertanto il centro di massa scende lungo il piano con accelerazione sempre costante (moto uniformemente accelerato lungo il piano) sia prima che durante che dopo l'urto, e "non vede" affatto l'urto.

Ricordando ora la relazione (19) otteniamo dal risultato (22) che

$$a_{dopo} = a_{CM} = 2.36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{23}$$

5. **Forze interne**
Osserviamo ora che

- dopo l'urto i due corpi proseguono solidalmente,

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \\ &\Downarrow \qquad \text{(dato che hanno la stessa massa } m\text{)} \\ p_1 &= p_2 \end{aligned} \tag{24}$$

- D'altra parte per definizione

$$P = p_1 + p_2 \tag{25}$$

Combinando (24) e (25) ricaviamo che

$$p_1 = p_2 = \frac{P}{2} \qquad \text{(dopo l'urto)} \tag{26}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} = \frac{dp_2}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dP}{dt} = \\ &\quad [\text{uso la (13)}] \\ &= mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right) \end{aligned} \tag{27}$$

- Per ciascuno dei due corpi possiamo scrivere $F_i = ma_i = \frac{dp_i}{dt}$, ossia

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \underbrace{F_{2\to1}}_{\text{interna}} + \underbrace{mg\sin\alpha - \mu_1 mg\cos\alpha}_{\text{esterne}} \\ \frac{dp_2}{dt} &= \underbrace{F_{1\to2}}_{\text{interna}} + \underbrace{mg\sin\alpha - \mu_2 mg\cos\alpha}_{\text{esterne}} \end{aligned} \right. \tag{28}$$

Dalle (28) abbiamo che

$$\left\{ \begin{aligned} F_{2\to1} &= \frac{dp_1}{dt} - mg\sin\alpha + \mu_1 mg\cos\alpha \\ F_{1\to2} &= \frac{dp_2}{dt} - mg\sin\alpha + \mu_2 mg\cos\alpha \end{aligned} \right. \tag{29}$$

Sostituendo la (27) nella prima delle (29) otteniamo

$$\begin{aligned} F_{2\to1} &= mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right) - mg\sin\alpha + \mu_1 mg\cos\alpha = \\ &= \frac{\mu_1-\mu_2}{2} mg\cos\alpha \end{aligned} \tag{30}$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} F_{2\to 1} &= \frac{0.4-0.2}{2}\,2\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= 1.70\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{31}$$

Analogamente, sostituendo la (27) nella seconda delle (29) otteniamo

$$\begin{aligned} F_{1\to 2} &= mg\left(\sin\alpha-\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right)-mg\sin\alpha+\mu_2 mg\cos\alpha\ = \\ &= -\frac{\mu_1-\mu_2}{2}mg\cos\alpha = \\ &= -F_{2\to 1} = \\ &= -1.70\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{32}$$

Come atteso dalla terza legge della dinamica, le due forze $F_{2\to 1}$ e $F_{1\to 2}$ sono uguali e contrarie.

- Dalle (27) ricaviamo anche l'andamento delle due quantità di moto dopo l'urto

$$p_1(t)=p_2(t)=mg\left(\sin\alpha-\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right)t \qquad (\text{dopo l'urto},\quad t>t_u) \tag{33}$$

Ricordando gli andamenti (8) ottenuti prima dell'urto, possiamo confrontare i valori delle due quantità di moto immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto:

- **corpo 1 (a valle)**

$$\begin{aligned} \text{prima:}\qquad p_1(t_u-\epsilon) &= mg\,(\sin\alpha-\mu_1\cos\alpha)\ t_u \\ \text{dopo:}\qquad p_1(t_u+\epsilon) &= mg\left(\sin\alpha-\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right)\ t_u = \qquad (34)\\ &= \underbrace{mg\,(\sin\alpha-\mu_1\cos\alpha)\ t_u}_{=p_1(t_u-\epsilon)}\ +\underbrace{mg\frac{\mu_1-\mu_2}{2}\cos\alpha\ t_u}_{=\Delta p} \qquad (35) \end{aligned}$$

- **corpo 2 (a monte)**

$$\begin{aligned} \text{prima:}\qquad p_2(t_u-\epsilon) &= mg\,(\sin\alpha-\mu_2\cos\alpha)\ t_u \\ \text{dopo:}\qquad p_2(t_u+\epsilon) &= mg\left(\sin\alpha-\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right)\ t_u\ = \qquad (36)\\ &= \underbrace{mg\,(\sin\alpha-\mu_2\cos\alpha)\ t_u}_{=p_2(t_u-\varepsilon)}\ \underbrace{-mg\frac{\mu_1-\mu_2}{2}\cos\alpha\,t_u}_{=-\Delta p} \qquad (37) \end{aligned}$$

Osservazione: I termini sottolineati mostrano che la singola quantità di moto *di ciascun corpo* **non solo non si conserva nel tempo, ma non si conserva nemmeno attraverso l'urto, ossia p_i subisce un salto discontinuo all'istante t_u dell'urto. In particolare, la quantità di moto del corpo 1 a valle subisce un brusco aumento, mentre quella del corpo 2 a monte una brusca diminuzione. Si noti la differenza rispetto alla quantità di moto totale $P=p_1+p_2$ che rimane sempre continua. L'andamento nel tempo è mostrato in Fig.2**

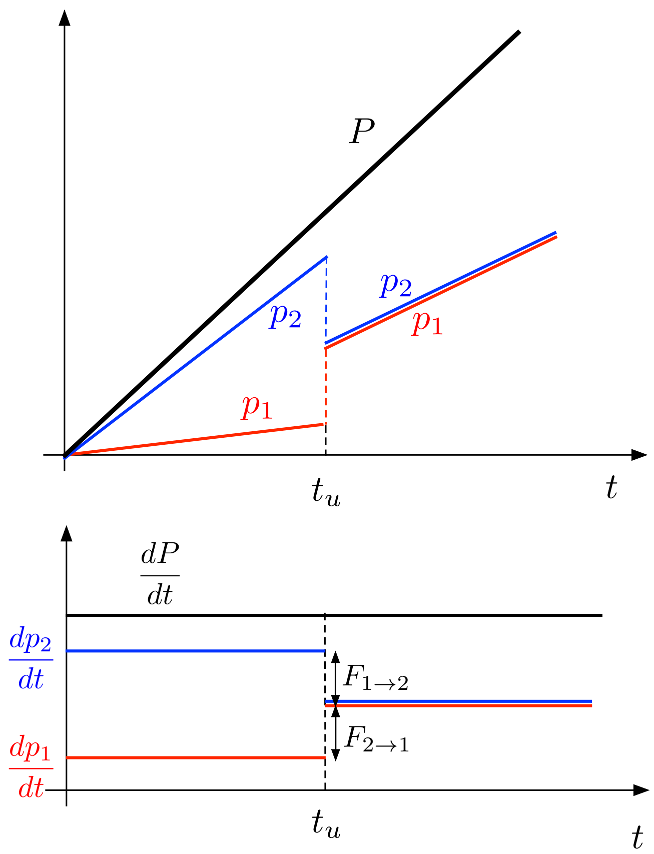


Figure 2: Pannello superiore: Andamento delle quantità di moto p_1 e p_2 dei due corpi (curve rossa e blu) e della quantità di moto totale $P = p_1 + p_2$ (curva nera). La quantità di moto totale non si conserva (cresce nel tempo). Tuttavia si conserva 'nell'urto' (è continua in $t = t_u$). Al contrario, p_1 e p_2 non si conservano nel tempo, né si conservano 'attraverso l'urto', dato che hanno una discontinuità in $t = t_u$. Pannello inferiore: L'andamento delle derivate dp_1/dt e dp_2/dt della quantità di moto dei due corpi mostra che le discontinuità sono dovute alle forze interne di ciascun corpo sull'altro, attive a partire dall'urto.