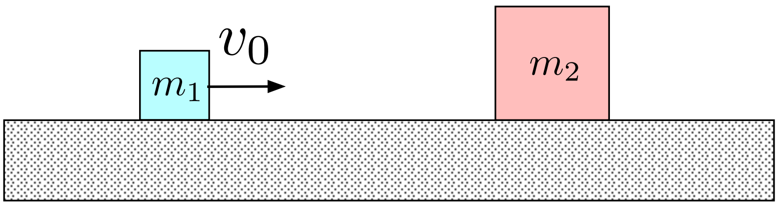
Esercizio

Un corpo di massa $m_1 = 1\,\text{kg}$ viene lanciato con velocità iniziale $v_0 = 10\,\text{m/s}$ verso destra lungo un piano orizzontale perfettamente liscio. Sul piano, lungo la direzione del lancio di m_1, giace un altro corpo di massa $m_2 = 3\,\text{kg}$ inizialmente fermo. Il primo corpo urta il secondo.

1. Supponendo che l'urto sia completamente anelastico, determinare:
   (a) l'andamento nel tempo della quantità di moto totale del sistema;
   (b) l'andamento nel tempo dell'energia meccanica totale del sistema;
   (c) la velocità $v_{1,\text{dopo}}$ del corpo m_1 dopo l'urto
2. Determinare le stesse quantità nel caso di urto elastico.



SOLUZIONE

DATI NOTI
$v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$
$m_1 = 1\,\mathrm{kg}$
$m_2 = 3\,\mathrm{kg}$

- Denotiamo con $t = 0$ l'istante iniziale di lancio del corpo m_1 e con t_u l'istante (ignoto) in cui avviene l'urto.

- **Il sistema è isolato?**
  La prima cosa che dobbiamo chiederci è se il sistema dei due corpi m_1 e m_2 è isolato o no. Dato che il piano è perfettamente liscio ($\rightarrow$non c'è alcuna forza di attrito) ed è orizzontale ($\rightarrow$forza peso e reazione vincolare del piano si cancellano esattamente su ciascuno dei due corpi) la somma delle forze *esterne* che agiscono sul sistema $m_1 + m_2$ è nulla. Dunque il sistema è isolato. Le uniche forze che si esercitano su ciascun corpo sono forze *interne* al sistema, ossia forze che ciascuno dei due corpi esercita sull'altro al momento dell'impatto. Essendo il sistema isolato, la quantità di moto totale $P = p_1 + p_2$ del sistema si conserva. Infatti, dalla prima equazione cardinale

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \sum F^{ext} = 0 \\ &\Downarrow \\ P(t) &= \text{cost} = P(t=0) \end{aligned} \qquad (1)$$

  Pertanto, indipendentemente dal fatto che l'urto avvenga in maniera elastica o anelastica, la quantità di moto totale rimane *sempre* costante nel tempo, anche attraverso l'urto, ed è ovviamente uguale al suo valore all'istante iniziale $t = 0$, come mostrato in Fig.1.

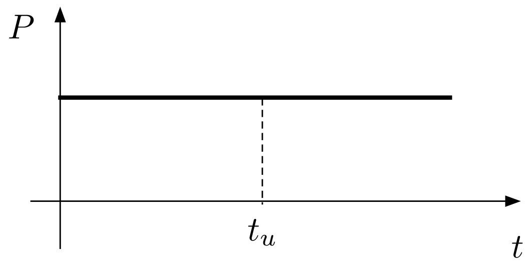


Figure 1: Dato che il sistema è isolato, la quantità di moto totale del sistema si conserva (=si mantiene sempre costante nel tempo).

- E' peraltro immediato calcolare tale valore, dato che all'istante iniziale il corpo m_1 ha velocità v_0 verso destra ed il corpo m_2 è fermo:

$$P(t=0) = m_1 v_0 + 0 \qquad (2)$$

  ossia

$$P(t) \equiv m_1 v_0 \qquad \forall t \qquad (3)$$

  Sostituendo i valori si trova

$$P(t) \equiv 1\,\mathrm{kg} \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 10 \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}} \qquad \forall t \qquad (4)$$

- Osserviamo anche che, siccome la quantità di moto totale del sistema è legata alla velocità v_{CM} del centro di massa tramite la relazione

$$P(t) = M v_{CM}(t) \qquad\qquad M = m_1 + m_2 \tag{5}$$

anche la velocità del centro di massa rimane *sempre* costante nel tempo e pari a

$$v_{CM}(t) = \frac{P(t)}{M} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \qquad \forall t \tag{6}$$

e, sostituendo i valori

$$v_{CM}(t) = \frac{1\,\cancel{\mathrm{kg}}}{1\,\cancel{\mathrm{kg}} + 3\,\cancel{\mathrm{kg}}} 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \forall t \tag{7}$$

Ne consegue che il centro di massa, che è sì collocato tra m_1 e m_2, ma più prossimo a m_2 (dato che $m_2 = 3m_1$), si muove verso destra più lentamente di m_1 e "non vede" l'urto, ossia prosegue indisturbato il suo moto a velocità costante, anche dopo l'urto. Ciò è dovuto al fatto che il sistema è isolato, ed è vero indipendentemente dal tipo di urto (elastico/anelastico).

- **Conservazione dell'energia?**
Riguardo all'energia meccanica del sistema, osserviamo che essa consta solo dell'energia cinetica. Prima che avvenga l'urto, solo il corpo m_1 si muove (con velocità costante v_0 verso destra), mentre il corpo m_2 è fermo. Pertanto, prima dell'urto l'energia meccanica è data dalla sola energia cinetica del corpo m_1, ed è pari a

$$E_m(t < t_u) = E_{K,1} + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \tag{8}$$

Sostituendo i valori

$$E_m(t < t_u) \;=\; \frac{1}{2} \cdot 1\,\mathrm{kg}\,(10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 50\, \underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}}_{=\mathrm{J}} = 50\,\mathrm{J} \tag{9}$$

In generale, in presenza di urti, l'energia meccanica *non* si conserva, ossia il suo valore dopo l'urto può variare rispetto al suo valore prima dell'urto (anche se il sistema è isolato!).

- Si noti dunque che per un sistema isolato, la quantità di moto si conserva indipendentemente dal fatto che le forze interne siano conservative o no, mentre per la conservazione dell'energia meccanica la natura conservativa o non-conservativa delle forze interne è determinante. Solo in presenza di un urto elastico le forze interne che si generano tra i due corpi al momento dell'impatto sono conservative e l'energia meccanica dopo l'urto è uguale al suo valore prima dell'urto. In tutti gli altri casi ciò non accade. Analizziamo pertanto le due situazioni di urto completamente anelastico ed elastico.

1. **Urto completamente anelastico**
In un urto completamente anelastico i due corpi, dopo l'urto, si uniscono e si muovono solidalmente formando un unico corpo di massa $m_1 + m_2$.

   - Dato che la quantità di moto totale P si conserva (=è sempre costante nel tempo), essa in particolare si conserva *attraverso l'urto*, ossia è *continua* all'istante t_u dell'urto, non subisce alcun salto attraverso l'urto. Possiamo dunque scrivere che

$$\begin{aligned}
\underbrace{P(t_u-\varepsilon)}_{P_{\rm prima}} &= \underbrace{P(t_u+\varepsilon)}_{P_{\rm dopo}} \\
&\Downarrow \\
m_1 v_0 &= (m_1+m_2) v_{\rm dopo} \\
&\Downarrow \\
v_{\rm dopo} &= \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0
\end{aligned} \tag{10}$$

dove ε indica un intervallo infinitesimo di tempo. Dall'Eq.(10) deduciamo che:

- Siccome dopo l'urto completamente anelastico i due corpi m_1 e m_2 viaggiano solidalmente, la loro velocità è la stessa ed è pari a quella data dall'Eq.(10)

$$v_{1,\rm dopo} = v_{2,\rm dopo} = v_{\rm dopo} = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0 \tag{11}$$

Sostituendo i valori, otteniamo

$$v_{1,\rm dopo} = v_{2,\rm dopo} \quad = \quad \frac{1\,\cancel{\rm kg}}{1\,\cancel{\rm kg}+3\,\cancel{\rm kg}} 10\frac{\rm m}{\rm s} = \frac{10}{4}\frac{\rm m}{\rm s} = 2.5\frac{\rm m}{\rm s} \tag{12}$$

Notiamo che il valore di tale velocità è uguale al valore della v_{CM} [vedi Eq.(7)]. Infatti, dato che i due corpi dopo l'urto si muovono insieme, il loro centro di massa coincide con la posizione di entrambi.

- **Osservazione**
Dalle velocità (10) dopo l'urto possiamo anche ricavare le quantità di moto di ciascuno dei due corpi dopo l'urto

$$\left\{ \begin{aligned}
p_{1,\rm dopo} &= m_1 v_{1,\rm dopo} = \tfrac{m_1^2}{m_1+m_2} v_0 = \tfrac{(1\,{\rm kg})^{\cancel{2}}}{1\,\cancel{\rm kg}+3\,\cancel{\rm kg}} 10\tfrac{\rm m}{\rm s} = 2.5\,\tfrac{\rm kg\,m}{\rm s} \\
p_{2,\rm dopo} &= m_2 v_{2,\rm dopo} = \tfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_0 = \tfrac{1\,{\rm kg}\cdot 3\,\cancel{\rm kg}}{1\,\cancel{\rm kg}+3\,\cancel{\rm kg}} 10\tfrac{\rm m}{\rm s} = 7.5\,\tfrac{\rm kg\,m}{\rm s}
\end{aligned} \right. \tag{13}$$

da cui si ritrova che la somma $p_{1,\rm dopo} + p_{2,\rm dopo}$ è sempre uguale alla quantità di moto (4) prima dell'urto, che però prima dell'urto era dovuta al solo corpo m_1. L'andamento nel tempo delle due quantità di moto è descritto nella Fig.2.

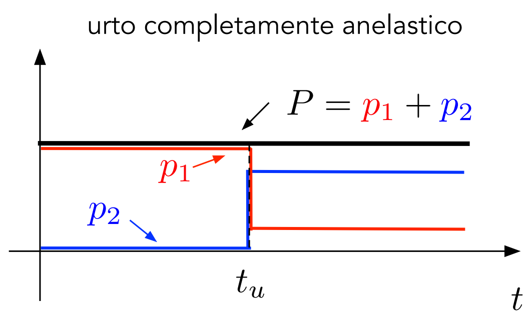


Figure 2: Il caso dell'urto completamente anelastico. La quantità di moto totale del sistema rimane sempre costante nel tempo, ma mentre prima dell'urto è dovuta al solo corpo m_1, dopo l'urto è distribuita tra tutti e due i corpi, che dopo l'urto si muovono assieme. Di conseguenza, la quantità di moto di ciascuno dei due corpi subisce un salto al momento dell'urto.

- Dopo l'urto l'energia meccanica del sistema è data dall'energia cinetica del blocco $m_1 + m_2$

$$\begin{aligned} E_m(t > t_u) &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{\text{dopo}}^2 = \\ &\quad \text{[uso l'Eq.(10)]} \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_0^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_0^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Confrontando col valore (8) prima dell'urto possiamo riscrivere il valore (14) dopo l'urto in questo modo

$$E_m(t > t_u) = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_0^2}_{E_{m,prima}} \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}_{<1} < E_{m,prima} \tag{15}$$

Deduciamo dunque che l'energia meccanica dopo l'urto completamente anelastico *diminuisce* di un fattore $\frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{1}{1+3} = 1/4$ rispetto al suo valore iniziale, subendo dunque un salto all'istante dell'urto e passando al valore

$$E_m(t > t_u) = \underbrace{50\,\mathrm{J}}_{E_{m,prima}} \cdot \frac{1}{4} = 12.5\,\mathrm{J} \tag{16}$$

Ciò significa che l'energia meccanica *non* si conserva attraverso l'urto (nonostante il sistema sia isolato!). L'andamento nel tempo è mostrato in Fig.3.

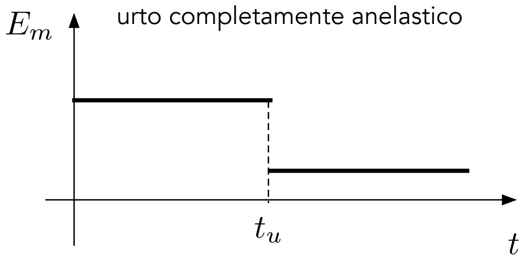


Figure 3: Il caso dell'urto completamente anelastico: anche se il sistema è isolato, l'energia meccanica del sistema non si conserva attraverso l'urto (ossia subisce una discontinuità all'istante t_u dell'urto) e dunque non si conserva nel tempo.

2. **Urto elastico**
A parte il caso dell'urto completamente anelastico visto sopra, in generale dopo l'urto i due corpi si separano nuovamente e proseguono il loro moto con due diverse velocità $v_{1,\text{dopo}}$ e $v_{2,\text{dopo}}$ che sono da determinarsi, ma che, essendo il piano liscio, rimangono costanti nel tempo.

   - In particolare, l'urto elastico è il caso ideale in cui l'energia meccanica si conserva attraverso l'urto, ossia non subisce alcuna discontinuità attraverso l'urto. In altri termini i due valori immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto sono uguali

$$\underbrace{E_m(t_u-\varepsilon)}_{E_{m,\text{prima}}} = \underbrace{E_m(t_u+\varepsilon)}_{E_{m,\text{dopo}}} \tag{17}$$

Essendo il piano liscio, il valore $E_{m,\text{prima}}$ immediatamente prima dell'urto è uguale al valore a qualunque istante prima dell'urto ed è dato dall'Eq.(8). Analogamente, il valore $E_{m,\text{dopo}}$ immediatamente dopo l'urto è uguale al valore a qualunque istante dopo l'urto. Pertanto l'energia meccanica dopo che l'urto è avvenuto è pure costante. Petanto si ha

$$E_m(t>t_u) = E_{m,\text{dopo}} = E_{m,\text{prima}} = E_m(t<t_u) = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 \tag{18}$$

e l'andamento è disegnato in Fig.4.

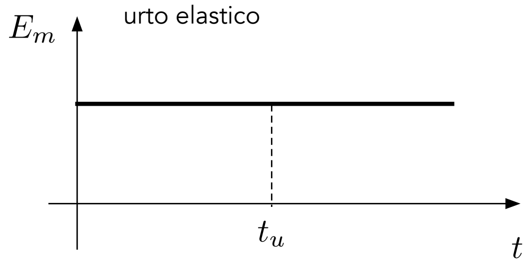


Figure 4: Il caso dell'urto elastico: l'energia meccanica del sistema si conserva attraverso l'urto (ossia subisce una discontinuità all'istante t_u dell'urto) e in particolare in questo caso si conserva anche nel tempo (ossia è sempre costante).

   - Per calcolare la velocità $v_{1,\text{dopo}}$ del corpo m_1 dopo l'urto possiamo procedere in due modi:
     (a) **Primo modo**
       – Il primo modo consiste nello sfruttare la conservazione della quantità di moto (che vale sempre perché il sistema è isolato) e la conservazione dell'energia meccanica (che vale in questo particolare caso di urto elastico). Quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} P_{\text{prima}} = P_{\text{dopo}} & \text{(cons. quantità di moto)} \\ E_{m,\text{prima}} = E_{m,\text{dopo}} & \text{(cons. energia)} \end{cases} \tag{19}$$

ossia

$$\begin{cases} m_1 v_0 = m_1 v_{1,\text{dopo}} + m_2 v_{2,\text{dopo}} \\ \frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,\text{dopo}}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,\text{dopo}}^2 \end{cases} \tag{20}$$

Sfruttando ora il fatto che $m_2 = 3m_1$ e semplificando per 1/2 la seconda equazione abbiamo

$$\begin{cases} m_1 v_0 = m_1 v_{1,\text{dopo}} + 3m_1 v_{2,\text{dopo}} \\ m_1 v_0^2 = m_1 v_{1,\text{dopo}}^2 + 3m_1 v_{2,\text{dopo}}^2 \end{cases} \tag{21}$$

Infine, dividendo per m_1

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_0 & = & v_{1,\text{dopo}} + 3 v_{2,\text{dopo}} \qquad \Rightarrow \qquad v_{2,\text{dopo}} = \frac{1}{3}(v_0 - v_{1,\text{dopo}}) \\ \\ v_0^2 & = & v_{1,\text{dopo}}^2 + 3 v_{2,\text{dopo}}^2 \end{array} \right. \tag{22}$$

e sostituendo la prima equazione nella seconda

$$\begin{array}{rcl} v_0^2 & = & v_{1,\text{dopo}}^2 + 3 \cdot \dfrac{1}{9}(v_0 - v_{1,\text{dopo}})^2 \\ & \Downarrow & \\ 3 v_0^2 & = & 3 v_{1,\text{dopo}}^2 + v_0^2 + v_{1,\text{dopo}}^2 - 2 v_0 v_{1,\text{dopo}} \end{array}$$

otteniamo un'equazione per l'incognita $v_{1,\text{dopo}}$

$$4 v_{1,\text{dopo}}^2 - 2 v_0 v_{1,\text{dopo}} - 2 v_0^2 = 0 \tag{23}$$

le cui soluzioni sono

$$v_{1,\text{dopo}} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 8 v_0^2}}{4} = \left\{ \begin{array}{lcl} v_{1,\text{dopo}}^{(1)} & = & v_0 \\ \\ v_{1,\text{dopo}}^{(2)} & = & -\dfrac{v_0}{2} \end{array} \right. \tag{24}$$

- La prima soluzione dà per il corpo m_1 una velocità esattamente uguale alla sua velocità v_0 prima dell'urto. E' dunque da rigettare fisicamente perché corrisponde al caso in cui il corpo m_1 passa attraverso il corpo m_2 senza che nulla accada (infatti, sostituendola nella prima delle Eq.(22), si vede che $v_{2,\text{dopo}} = 0$ ossia il corpo m_2 rimane immobile).
- La soluzione fisicamente sensata è dunque la seconda.

$$v_{1,\text{dopo}} = -\frac{v_0}{2} \tag{25}$$

Sostituendo i valori, troviamo

$$v_{1,\text{dopo}} = -5 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{26}$$

Il fatto che sia negativa indica che, nel caso dell'urto elastico, il corpo m_1 rimbalza indietro dopo l'urto (dato che $m_2 > m_1$).

- **Osservazione**
  Il risultato (26) permette di determinare la quantità di moto del corpo m_1 dopo l'urto

$$p_{1,\text{dopo}} = m_1 v_{1,\text{dopo}} = 1\,\text{kg} \cdot (-5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}) = -5\,\frac{\text{kg}\,\text{m}}{\text{s}} \tag{27}$$

Dato che la quantità di moto totale P si conserva sempre nel tempo ed è pari a $P = p_1 + p_2 = 10\,\text{kg}\,\text{m/s}$ [vedi Eq.(4)], ne deduciamo che la quantità di moto del corpo m_2 dopo l'urto vale

$$p_{2,\text{dopo}} = 15\,\frac{\text{kg}\,\text{m}}{\text{s}} \tag{28}$$

L'andamento nel tempo delle due quantità di moto nel caso dell'urto elastico è mostrato in Fig.5.

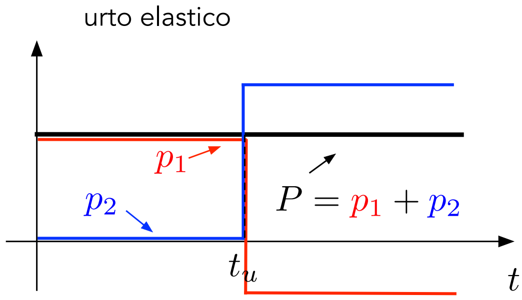


Figure 5: Il caso dell'urto completamente elastico. La quantità di moto totale rimane sempre costante nel tempo, ma dopo l'urto ciascuna delle due quantità di moto subisce un salto. In particolare il corpo m_1 inverte anche il segno della quantità di moto, dato che rimbalza indietro.

(b) **Secondo modo**
Possiamo risolvere il problema nel sistema di riferimento del centro di massa e poi tornare al sistema del laboratorio sfruttando le relazioni

$$v_j = v_{CM} + v'_j \qquad\qquad j = 1,2 \tag{29}$$

che legano le velocità v_j viste nel sistema del laboratorio alle velocità v'_j viste nel sistema del centro di massa, dove la velocità v_{CM} del centro di massa è costante ed è nota [vedi Eq.(6)].

- In particolare per il corpo m_1 abbiamo quindi

$$\begin{cases} v_{1,\text{prima}} &= v_{CM} + v'_{1,\text{prima}} \\ \\ v_{1,\text{dopo}} &= v_{CM} + v'_{1,\text{dopo}} \end{cases} \tag{30}$$

- D'altra parte nel sistema di riferimento del centro di massa un urto *elastico* tra due corpi corrisponde al fatto che ciascuno dei due corpi cambia di segno alla propria quantità di moto attraverso l'urto

$$\begin{cases} p'_{1,\text{dopo}} &= -p'_{1,\text{prima}} \\ \\ p'_{2,\text{dopo}} &= -p'_{2,\text{prima}} \end{cases}$$

e dunque, in particolare, per il corpo m_1

$$\begin{aligned} p'_{1,\text{dopo}} &= -p'_{1,\text{prima}} \\ &\Downarrow \\ m_1 v'_{1,\text{dopo}} &= -m_1 v'_{1,\text{prima}} \\ &\Downarrow \\ v'_{1,\text{dopo}} &= -v'_{1,\text{prima}} \end{aligned} \tag{31}$$

– Dalla seconda delle Eq.(30) abbiamo

$$
\begin{aligned}
v_{1,\text{dopo}} &= v_{CM} + v'_{1,\text{dopo}} = \\
& \quad [\text{uso l'Eq.(31)}] \\
&= v_{CM} - v'_{1,\text{prima}} = \\
& \quad [\text{dalla prima delle Eq.(30) ricavo } v'_{1,\text{prima}} = v_{1,\text{prima}} - v_{CM}] \\
&= v_{CM} - (v_{1,\text{prima}} - v_{CM}) = \\
& \quad [\text{uso l'Eq.(31)}] \\
&= 2v_{CM} - v_{1,\text{prima}} = \\
& \quad [\text{uso } v_{1,\text{prima}} = v_0 \text{ e l'Eq.(6)}] \\
&= 2\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0 - v_0 = \\
&= \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2} - 1\right) v_0 = \\
&= \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} v_0
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Da questa relazione si vede che, se $m_1 > m_2$ il corpo m_1 rimbalza in avanti dopo l'urto, mentre se $m_2 > m_1$ il corpo m_1 rimbalza indietro. Ricordando che nel nostro caso $m_2 = 3m_1$ si ritrova il risultato

$$
v_{1,\text{dopo}} = -\frac{v_0}{2} \tag{33}
$$

precedentemente trovato nell'Eq.(25) col primo metodo.