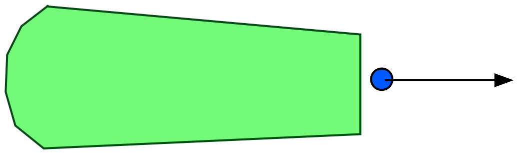
Esercizio (tratto dal problema 6.9 del Mazzoldi 2)

Un cannone di massa $M = 2500\,\mathrm{kg}$ spara un proiettile di massa $m = 5\,\mathrm{kg}$ con velocità $v = 300\,\mathrm{m/s}$. Calcolare

1. La velocità di rinculo del cannone
2. l'energia cinetica del cannone
3. la costante elastica di una molla che possa arrestare la corsa del cannone in $30\,\mathrm{cm}$.



SOLUZIONE

Dati noti:

$$
\begin{aligned}
M &= 2500\,\text{kg} \\
m &= 5\,\text{kg} \\
v_{\text{pro}} &= 300\,\text{m/s} \\
\Delta l &= 0.3\,\text{m}
\end{aligned}
$$

1. Il sistema cannone+proiettile è un sistema isolato, dato che le forze che causano lo sparo del proiettile sono forze interne a tale sistema, e che non vi sono agenti esterni che agiscono su tale sistema.

$$
\frac{dP}{dt} = \sum F^{ext} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P(t) = \text{cost} \tag{1}
$$

Pertanto la quantità di moto totale del sistema isolato rimane sempre costante nel tempo, ed in particolare è la stessa sia prima che dopo lo sparo (vedi Fig.1).

$$
\begin{aligned}
P_{\text{prima}} &= P_{\text{dopo}} \\
0 + 0 &= p_{\text{can,dopo}} + p_{\text{pro,dopo}} \\
&\Downarrow \\
p_{\text{can,dopo}} &= -p_{\text{pro,dopo}} \\
&\Downarrow \\
M v_{\text{can}} &= -m v_{\text{pro}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

da cui ricaviamo che

$$
v_{\text{can}} = -\frac{m}{M}\, v_{\text{pro}} \tag{3}
$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$
\begin{aligned}
v_{\text{can}} &= -\frac{5\,\cancel{\text{kg}}}{2500\,\cancel{\text{kg}}}\, 300 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \\
&= -\frac{3}{5}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \\
&= -0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned} \tag{4}
$$

dove il segno '-' indica che il cannone si muove verso sinistra.

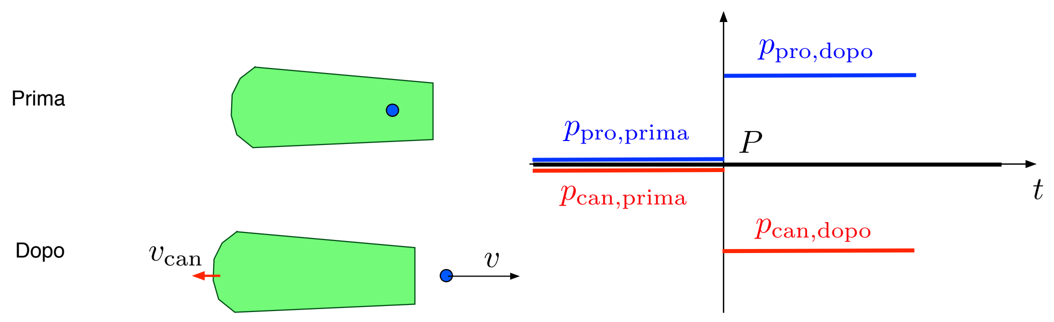


Figure 1: Il sistema cannone+proiettile è un sistema isolato, e la quantità di moto totale del sistema (linea nera) rimane sempre costante nel tempo: in particolare è la stessa sia prima che dopo lo sparo del proiettile. Le quantità di moto dei due singoli costituenti (linee rossa e blu), invece, variano nel tempo e all'istante dello sparo subiscono un salto che è uguale ed opposto.

Osservazione importante
Mentre la quantità di moto totale P del sistema è sempre costantemente uguale a zero, le quantità di moto dei due singoli costituenti variano nel tempo e all'istante dello sparo subiscono un salto, che è necessariamente uguale ed opposto ($p_{\rm can,dopo} = -p_{\rm pro,dopo}$) in modo appunto che la quantità di moto totale P rimanga nulla. Tuttavia, dato che la massa M del cannone è molto più grande della massa m del proiettile, una pari quantità di moto in modulo ($|p_{\rm can,dopo}| = |p_{\rm pro,dopo}|$) implica che la velocità di rinculo del proiettile è molto minore della velocità del proiettile, come si evince dall'Eq.(4).

2. L'energia cinetica del cannone dopo lo sparo vale

$$E_{k,\rm can} = \frac{1}{2}Mv_{\rm can}^2 \tag{5}$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned} E_{k,\rm can} &= \frac{1}{2}2500\,\mathrm{kg}\left(-\frac{3}{5}\frac{\rm m}{\rm s}\right)^2 = \\ &= 450\,\mathrm{kg}\,\frac{\rm m^2}{\rm s^2} = \\ &= 450\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{6}$$

Nota Bene: L'energia cinetica del sistema cannone+proiettile non si conserva tra prima e dopo lo sparo. Infatti abbiamo

$$\begin{aligned} E_{k,\rm prima} &= 0 \\ E_{k,\rm dopo} &= E_{k,\rm can} + E_{k,\rm pro} = \frac{1}{2}Mv_{\rm can}^2 + \frac{1}{2}mv^2 > 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Il fatto che l'energia cinetica non si conservi non deve sorprendere. Infatti la conservazione della quantità di moto totale dipende solo dal fatto che il sistema è isolato, ossia dal fatto che le uniche forze che agiscono sono forze *interne*. La conservazione dell'energia, invece, dipende anche dal tipo di tali forze interne, ossia se sono conservative o no. Il fatto che l'energia non si conservi indica che le forze interne non sono conservative.

3. Il cannone si dirige ora verso la molla (inizialmente a riposo), che comprimendosi esercita una forza elastica rallentando il cannone, fino ad arrestarlo (vedi Fig.2). Osserviamo che

- Quando il cannone entra in contatto con molla, il sistema cannone+proiettile *non è più isolato*, dato che un agente esterno (=la molla) esercita una forza su uno dei due componenti del sistema (=il cannone). Pertanto dall'istante in cui il cannone tocca la molla *la quantità di moto P del sistema non si conserva*, ma diminuisce. Infatti il cannone si arresta, ossia passa da una velocità $v_{\rm can}$ a velocità nulla.
- La forza che la molla esercita sul cannone per arrestarlo è la forza elastica, che è conservativa. Pertanto possiamo applicare il teorema di conservazione dell'energia meccanica

$$E_m^{in} = E_m^{fin} \tag{8}$$

Nello stato iniziale l'energia meccanica è data dall'energia cinetica del cannone. All'istante finale, ossia quando la molla è compressa ed il cannone si arresta, l'energia meccanica è data dall'energia potenziale elastica della molla. Pertanto

$$\begin{aligned} E_{k,\rm can}^{in} + 0 &= 0 + E_{p,\rm mol}^{fin} \\ \frac{1}{2}Mv_{\rm can}^2 &= \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \end{aligned} \tag{9}$$

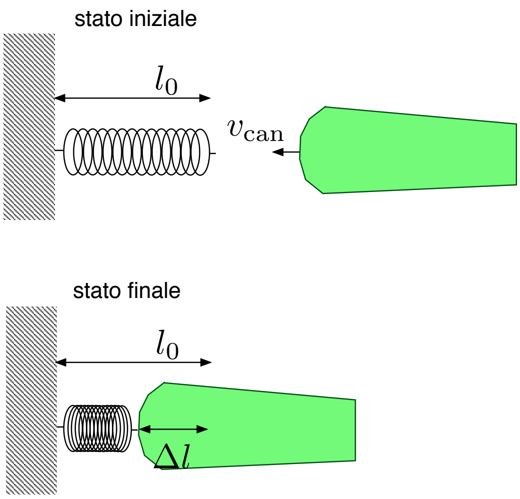


Figure 2:

da cui

$$k = \frac{2E^{in}_{k,\mathrm{can}}}{(\Delta l)^2} \tag{10}$$

Sostituendo i dati

$$k = \frac{2 \cdot 450\,\mathrm{J}}{(0.3\,\mathrm{m})^2} = 10.000\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{m}^2} = 10^4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{11}$$