
Esercizio (tratto dal problema 6.10 del Mazzoldi 2)

Due palline di uguale massa m vengono lanciate da una certa altezza, sotto l'azione della forza peso, con velocità iniziali $\vec{v}_1^0 = (2\hat{u}_x + 3\hat{u}_y)$ m/s e $\vec{v}_2^0 = (4\hat{u}_x - 2\hat{u}_y)$ m/s (l'asse x è orizzontale e l'asse y è verticale e orientato verso l'alto). Calcolare, al tempo $t^* = 0.1$ s

1. la velocità del centro di massa;
2. l'accelerazione del centro di massa;
3. il loro modulo.

SOLUZIONE

1. Velocità del centro di massa

La legge oraria delle velocità per le due particelle è data da

$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_1^0 + \vec{g}t \quad (1)$$

$$\vec{v}_2(t) = \vec{v}_2^0 + \vec{g}t \quad (2)$$

e dunque la velocità del centro di massa è

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CM}(t) &= \frac{m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1 (\vec{v}_1^0 + \vec{g}t) + m_2 (\vec{v}_2^0 + \vec{g}t)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1 \vec{v}_1^0 + m_2 \vec{v}_2^0}{m_1 + m_2} + \vec{g}t \end{aligned} \quad (3)$$

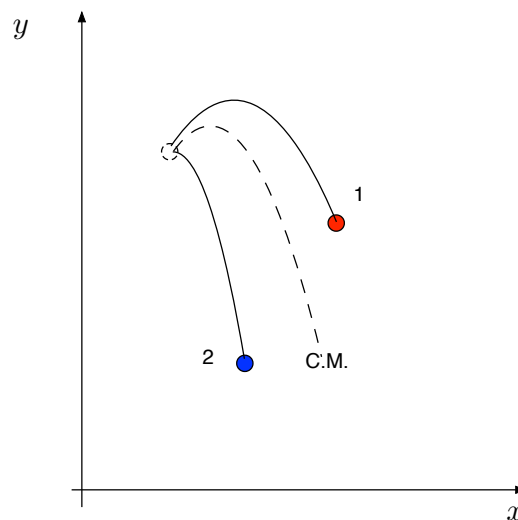
In componenti (ricordando che $\vec{g} = (0, -g)$)

$$\begin{cases} v_{CM,x}(t) = \frac{m_1 v_{1,x}^0 + m_2 v_{2,x}^0}{m_1 + m_2} = \text{cost. nel tempo} \\ v_{CM,y}(t) = \frac{m_1 v_{1,y}^0 + m_2 v_{2,y}^0}{m_1 + m_2} - g t \end{cases}$$

Ricordando che le due masse sono uguali $m_1 = m_2 = m$, otteniamo

$$\begin{cases} v_{CM,x}(t) = \frac{v_{1,x}^0 + v_{2,x}^0}{2} = \text{cost. nel tempo} \\ v_{CM,y}(t) = \frac{v_{1,y}^0 + v_{2,y}^0}{2} - g t \end{cases}$$

Sostituendo i dati, otteniamo



$$\begin{cases} v_{CM,x}(t^*) = \frac{2 \text{ m/s} + 4 \text{ m/s}}{2} = 3 \text{ m/s} \\ v_{CM,y}(t^*) = \frac{3 \text{ m/s} - 2 \text{ m/s}}{2} - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.1 \text{ s} = (0.5 - 0.981) \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0.481 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

il cui modulo vale

$$\begin{aligned} |\vec{v}_{CM}(t^*)| &= \sqrt{(v_{CM,x}(t^*))^2 + (v_{CM,y}(t^*))^2} = \\ &= \sqrt{\left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(-0.481 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \\ &= 3.04 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \quad (4)$$

2. Accelerazione del centro di massa

Per entrambe le masse l'accelerazione è data solo dall'accelerazione di gravità. Dunque anche il centro di massa è soggetto all'accelerazione \vec{g} :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{CM}(t) &= \frac{m_1 \vec{a}_1(t) + m_2 \vec{a}_2(t)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g}}{m_1 + m_2} = \\ &= \vec{g} = \text{const} \end{aligned} \quad (5)$$

il cui modulo vale 9.81 m/s^2 .