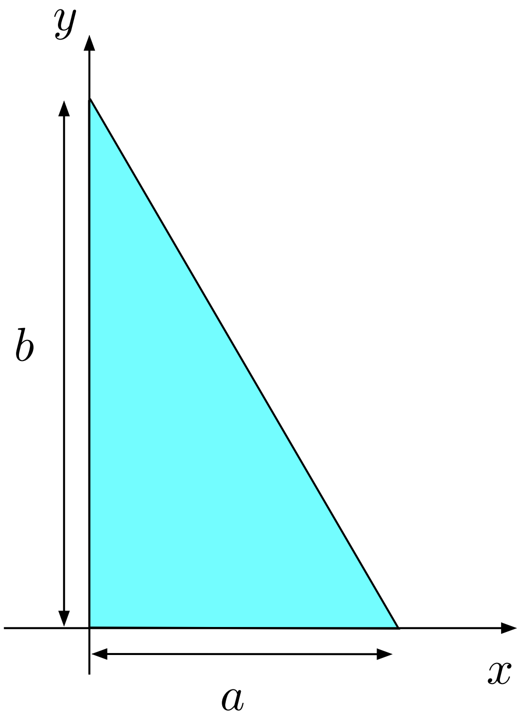
Esercizio

Una lastra omogenea di massa M nota, a forma di triangolo rettangolo di cateti a e b, è posta su un piano orizzontale come mostrato in figura.

Calcolare la posizione del centro di massa della lastra.



SOLUZIONE

Dati noti
$M = 1.2\,\mathrm{kg}$
$a = 30\,\mathrm{cm}$
$b = 40\,\mathrm{cm}$

- Dato che la lastra è omogenea, la densità superficiale σ di massa è uniforme e vale

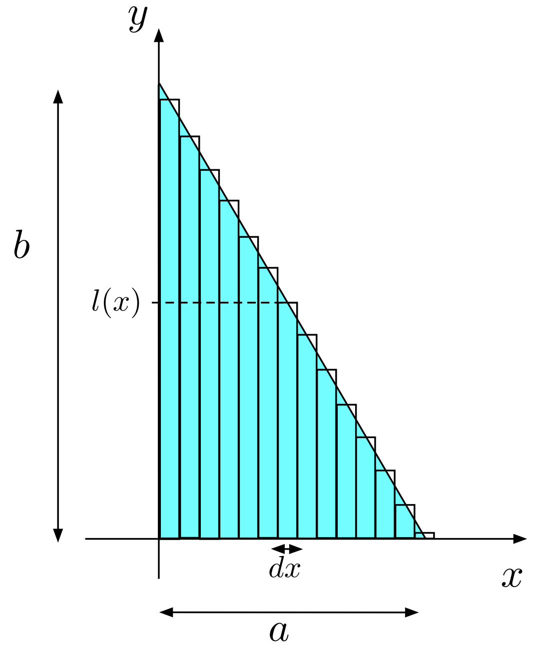
$$\sigma = \frac{M}{\mathrm{Area}} = \frac{M}{\frac{a\,b}{2}} = \frac{2\,M}{ab} \tag{1}$$

- Per calcolare la coordinata x del centro di massa dividiamo il triangolo in tanti strisce verticali sottili di base infinitesima dx. Ogni striscia verticale ha un'altezza l che dipende dalla posizione orizzontale x del centro della striscia. La relazione $l(x)$ è facilmente determinata dall'equazione della retta su cui giace l'ipotenusa del triangolo

$$y = b - \frac{b}{a}\,x \qquad \rightarrow \qquad l(x) = b - \frac{b}{a}\,x \tag{2}$$

Pertanto l'area di una striscia centrata attorno alla posizione x vale

$$dS(x) = l(x)\,dx \, = \left(b - \frac{b}{a}\,x\right)\,dx \tag{3}$$



- La coordinata x del centro di massa vale

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{M}\int_{\mathrm{triang}} x\, dm = \\ &= \frac{1}{M}\int_{\mathrm{triang}} x\, \sigma\, dS = \\ & \text{[uso l'Eq.(8)]} \\ &= \frac{\sigma}{M}\int_0^a x\, \left(b - \frac{b}{a}x\right)\, dx = \\ &= \frac{\sigma}{M}\left(b\int_0^a x\, dx - \frac{b}{a}\int_0^a x^2\, dx\right) = \\ &= \frac{\sigma}{M}\left(\frac{b\, a^2}{2} - \frac{b}{a}\frac{a^3}{3}\right) = \\ &= \frac{\sigma\, ab}{M}\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right) = \\ &= \frac{\sigma\, ab}{M}\frac{a}{6} \end{aligned} \tag{4}$$

Dall'Eq.(1) abbiamo

$$\sigma\, ab = 2M \tag{5}$$

Pertanto

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{a}{3} \tag{6}$$

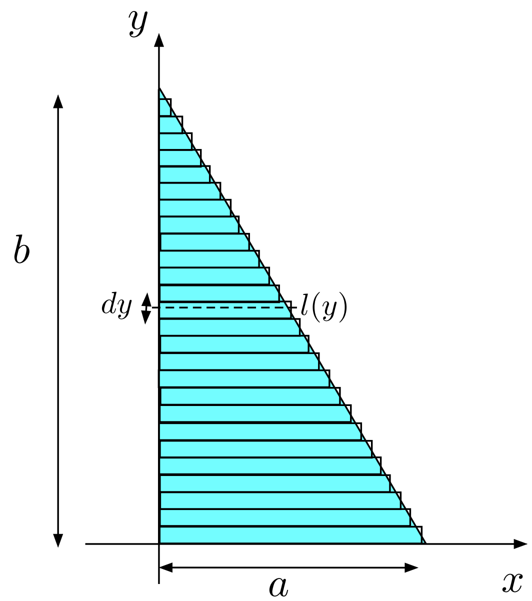
- In modo analogo per calcolare la coordinata y del centro di massa divido il triangolo in tane strisce orizzontali di altezza dy e di base $l(y)$ data da

$$y = b - \frac{b}{a}x \qquad \rightarrow \qquad x = a - \frac{a}{b}y \qquad \rightarrow \qquad l(y) = a - \frac{a}{b}y \tag{7}$$

Pertanto l'area di una striscia centrata attorno alla posizione y vale

$$dS(y) = l(y)\, dy = \left(a - \frac{a}{b}\, y\right)\, dy \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
y_{\rm CM} &= \frac{1}{M}\int_{\rm triang} y\, dm = \\
&= \frac{1}{M}\int_{\rm triang} y\,\sigma\, dS = \\
&\quad \text{[uso l'Eq.(8)]} \\
&= \frac{1}{M}\int_{\rm triang} y\ \sigma\, l(y)\, dx = \\
&= \frac{\sigma}{M}\int_0^b y\left(a-\frac{a}{b}\,y\right)\, dy = \\
&= \frac{\sigma}{M}\left(a\int_0^b y dy - \frac{a}{b}\int_0^b y^2\, dy\right) = \\
&= \frac{\sigma}{M}\left(\frac{a\,b^2}{2} - \frac{a}{b}\,\frac{b^3}{3}\right) = \\
&= \frac{\sigma\, ba}{M}\left(\frac{b}{2}-\frac{b}{3}\right) = \\
&= \frac{\sigma\, ba}{M}\,\frac{b}{6}
\end{aligned} \tag{9}
$$



Dall'Eq.(1) abbiamo

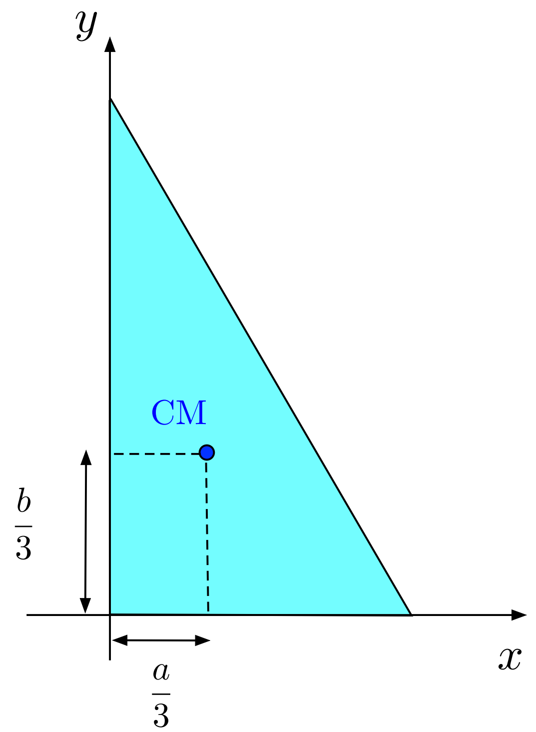
$$\sigma\, ba = 2M \tag{10}$$

e dunque

$$y_{\rm CM} = \frac{1}{3}\,b \tag{11}$$

- In conclusione il centro di massa del triangolo è

$$\vec{r}_{\rm CM} = (x_{\rm CM}\,,\, y_{\rm CM}) = (\frac{1}{3}\,a, \frac{1}{3}\,b) \tag{12}$$


y
CM
b
3
a
3
x