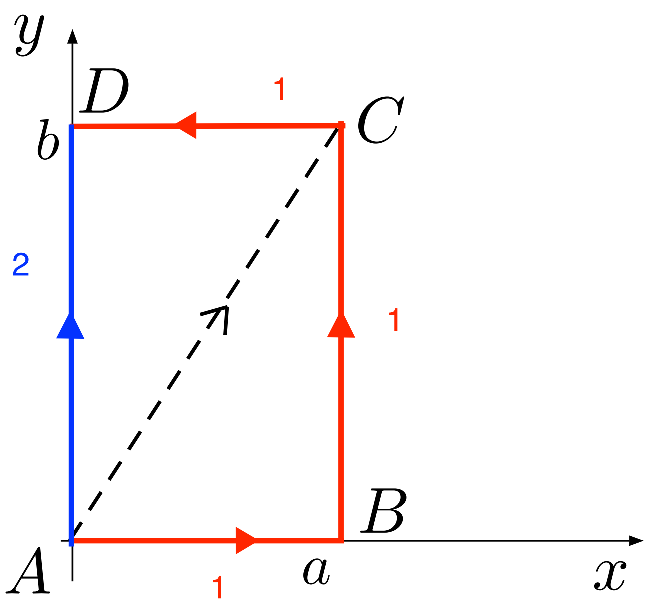
Esercizio

Una carica elettrica q si trova sul piano xy ed è soggetta ad un potenziale elettrostatico

$$V(x, y) = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0}(-x^2 + 3xy) \qquad\qquad A = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C/m^3} \tag{1}$$



Calcolare:

1. il campo elettrico che agisce sulla carica
2. il lavoro compiuto per spostare la carica q da A a D lungo il percorso $A \to B \to C \to D$ descritto in figura;
3. il lavoro per spostare la carica q da A a D verticalmente, e confrontarlo con il lavoro ottenuto al punto precedente;
4. il lavoro per spostare la carica da A a C lungo la diagonale, e confrontarlo con il lavoro compiuto nel tratto $A \to B \to C$

SOLUZIONE

1. Per calcolare il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$, utilizzando il legame

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x,y) &= -\nabla V(x,y) = \\
&= \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \\
&= \left(\underbrace{\frac{A}{4\pi\varepsilon_0}(2x-3y)}_{E_x(x,y)}\,,\ \underbrace{-\frac{A}{4\pi\varepsilon_0}3x}_{=E_y(x,y)}\right) \qquad (2)
\end{aligned}$$

2. Calcoliamo il lavoro lungo il percorso $A \to B \to C \to D$

$$W^{A\to D}\Big|_{\text{perc.1}} = W^{A\to B} + W^{B\to C} + W^{C\to D} \qquad (3)$$

- $A \to B$
  x varia da 0 a a
  $y = \text{cost} = 0$

$$\begin{aligned}
W^{A\to B} &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \\
&= q\int_A^B (E_x\,dx + E_y \underbrace{dy}_{=0}) = \\
&= q\int_0^a E_x\,dx = \\
&= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a (2x - \underbrace{3y}_{=0})\,dx = \\
&= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a 2x\,dx = \\
&= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\,a^2 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Osserviamo che $W^{A\to B}$ si può calcolare anche sfruttando il fatto che il campo elettrostatico è conservativo, e dunque il lavoro per spostare una carica da A a B coincide con (meno) la variazione di energia potenziale

$$\begin{aligned}
W^{A\to B} &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \\
&= -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) = \\
&= -q\left(V(B) - V(A)\right) = \\
&= q\left(V(A) - V(B)\right) \qquad (5)
\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} W^{A\to B} &= q\,(V(0,0)-V(a,0)) = \\ &= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-0^2+3\cdot 0\cdot 0)-\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-a^2+3\cdot a\cdot 0) = \\ &= +\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}a^2 \end{aligned} \quad (6)$$

che coincide con quanto ottenuto nella (4).

- $B \to C$
  $x = \text{cost} = a$
  y varia da 0 a b

$$\begin{aligned} W^{B\to C} &= \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{r} = \\ &= q\int_B^C (E_x \underbrace{dx}_{=0} + E_y\,dy) = \\ &= q\int_0^b E_y\,dy = \\ &= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^b (-\underbrace{3x}_{=3a})\,dy = \\ &= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^b (-3a)\,dy = \\ &= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-3a)\int_0^b dy = \\ &= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-3ab) \end{aligned} \quad (7)$$

Anche in questo caso si poteva effettuare il calcolo tramite il potenziale:

$$W^{B\to C} = -(E_p(C)-E_p(B)) \ = q\,(V(B)-V(C)) \quad (8)$$

e dunque

$$\begin{aligned} W^{B\to C} &= q\,(V(a,0)-V(a,b)) = \\ &= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-a^2+3\cdot a\cdot 0)-\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-a^2+3ab) = \\ &= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-3ab) \end{aligned} \quad (9)$$

che coincide con quanto ottenuto nella (7).

- $C \to D$
  x varia da a a 0
  $y = \text{cost} = b$

$$
\begin{aligned}
W^{C\to D} &= \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\int_C^D \vec{E}\cdot d\vec{r} = \\
&= q\int_C^D (E_x\,dx + E_y \underbrace{dy}_{=0}) = \\
&= q\int_a^0 E_x\,dx = \\
&= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^0 (2x - \underbrace{3y}_{3b})\,dx = \\
&= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^0 (2x-3b)\,dx = \\
&= -\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a (2x-3b)\,dx = \\
&= -\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^a 2x\,dx \;-\int_0^a 3b\,dx\right) = \\
&= -\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^a dx \;-3b\int_0^a dx\right) = \\
&= -\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\left(a^2 \;-3ab\right) = \\
&= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\left(3ab - a^2\right) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Anche in questo caso si poteva effettuare il calcolo tramite il potenziale:

$$
W^{C\to D} = -(E_p(D)-E_p(C)) = -(qV(D)-qV(C)) = q\,(V(C)-V(D)) \qquad (11)
$$

e dunque

$$
\begin{aligned}
W^{C\to D} &= q\,(V(a,b)-V(0,b)) = \\
&= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-a^2+3ab) - \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-0^2+3\cdot 0\cdot b) = \\
&= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-a^2+3ab) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

che coincide con quanto ottenuto nella (10).

Sommando i tre contributi abbiamo

$$
\begin{aligned}
W^{A\to D}\big|_{\text{perc.1}} &= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}a^2 + \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-3ab) + \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(3ab-a^2) = \\
&= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\left(a^2 \;-3ab+3ab-a^2\right) = \\
&= 0 \qquad (13)
\end{aligned}
$$

3. Calcoliamo ora il lavoro lungo il percorso $D \to A$ verticalmente $x = \text{cost} = 0$

y varia da b a 0

$$\begin{aligned} W^{A\to D}\Big|_{\text{perc. 2}} &= \int_A^D \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\int_A^D \vec{E}\cdot d\vec{r} = \\ &= q\int_A^D (E_x \underbrace{dx}_{=0} + E_y\, dy) = \\ &= q\int_b^0 E_y\, dy = \\ &= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^0 (-\underbrace{3x}_{=0})\, dy = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

o analogamente

$$\begin{aligned} W^{\text{perc. 2}}_{A\to D} &= q\,(V(A)-V(D)) \\ &= q\,(V(0,0)-V(0,b)) = \\ &= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-0^2+3\cdot 0\cdot 0) - \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(-0^2+3\cdot 0\cdot b) = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Confrontando la (13) e la (14) oserviamo che

$$W^{\text{perc. 1}}_{A\to D} = W^{\text{perc. 2}}_{A\to D} \tag{16}$$

ossia il lavoro per andare dal punto A al punto D *non dipende dal percorso*. Questo è dovuto ancora al fatto che il campo elettrostatico è conservativo, e dunque il lavoro è pari a (meno) la variazione di energia potenziale. Pertanto si ha

$$W^{A\to D}\Big|_{\text{perc.1}} = \underbrace{q(V(A)-V(B))}_{A\to B} + \underbrace{q(V(B)-V(C))}_{B\to C} + \underbrace{q(V(C)-V(D))}_{C\to D} = q(V(A)-V(D)) \tag{17}$$

$$W^{A\to D}\Big|_{\text{perc.2}} = q(V(A)-V(D)) \tag{18}$$

ossia il lavoro per spostare una carica da un punto A al punto D non dipende dal percorso scelto, ma solo dai punti iniziale e finale.

4. Analogamente abbiamo che il lavoro da A a C

$$\begin{aligned} W^{A\to C}\Big|_{\text{diag}} &= \int_A^C \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{r} = \\ &= q\int_A^C (-\boldsymbol{\nabla} V\cdot d\vec{r}) = \\ &= -q\,(V(C)-V(A)) = \\ &= q\,(V(A)-V(C)) \end{aligned} \tag{19}$$

dove

$$\begin{cases} A = (0,0) \\ C = (a,b) \end{cases} \tag{20}$$

Ricordando che

$$V(x,y) = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0}(-x^2+3xy) \tag{21}$$

abbiamo

$$\begin{cases} V(A) & = & 0 \\ \\ V(C) & = & \frac{A}{4\pi\varepsilon_0}(-a^2+3ab) \end{cases} \tag{22}$$

e dunque

$$\begin{aligned} W^{A\to C}\Big|_{\mathrm{diag}} &= q\,(V(A)-V(C)) = \\ &= \frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(a^2-3ab) \end{aligned} \tag{23}$$

e notiamo che

$$W^{A\to B}+W^{B\to C}=\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}(a^2-3ab) \tag{24}$$

Pertanto

$$W^{A\to C}\Big|_{\mathrm{diag}}=W^{A\to B}+W^{B\to C} \tag{25}$$

ossia il lavoro per spostare la carica da $A \to C$ non dipende dal percorso.