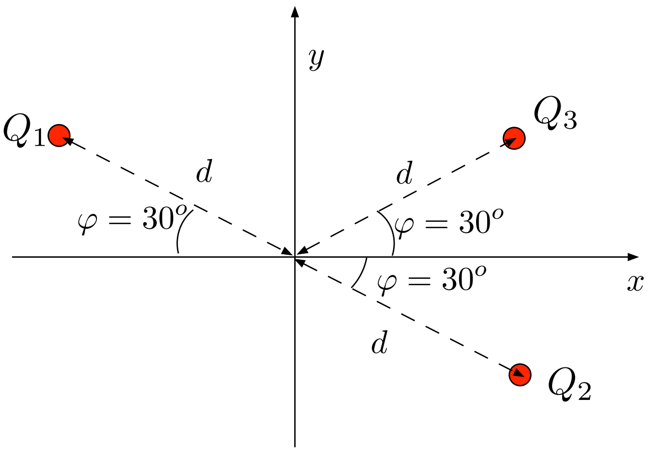
Esercizio (tratto dal Problema svolto 22.2 dell'Halliday Resnick Walker)

La figura mostra tre particelle con cariche $Q_1 = +2Q$, $Q_2 = -2Q$ e $Q_3 = -4Q$, tutte poste ad una distanza d dall'origine.

1. Calcolare il potenziale V generato dalle tre cariche
2. Quanto vale il campo elettrico $\vec{E}$ nell'origine ?



SOLUZIONE

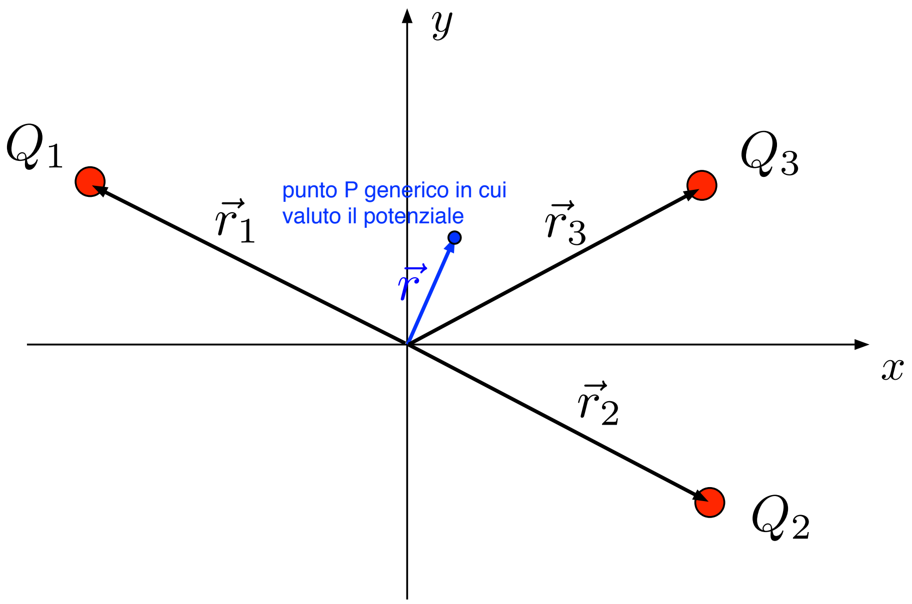
Ogni carica sorgente Q posta in un punto S genera in un punto P dello spazio un potenziale elettrostatico dato da

$$V(P) = k\,\frac{Q}{r_{SP}} \tag{1}$$

dove

- r_{SP} è la distanza che va dal punto sorgente S al punto P dello spazio;
- la costante k vale
$$k = 8.9875 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \tag{2}$$
e si può anche scrivere equivalentemente come
$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \text{con} \qquad \varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N\,m^2}} \tag{3}$$

1. Consideriamo un punto P generico identificato dal vettore posizione
$$\vec{r} = (x, y) \tag{4}$$



Il potenziale elettrico $V(\vec{r})$ in tale punto $\vec{r}$ è dato dalla somma dei tre potenziali prodotti $V_i(\vec{r})$ $(i = 1, 2, 3)$ dalle tre cariche situate nelle posizioni

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{r}_1 = (x_1, y_1) & = & (-d\cos\frac{\pi}{6}, +d\sin\frac{\pi}{6}) \\ \vec{r}_2 = (x_2, y_2) & = & (+d\cos\frac{\pi}{6}, -d\sin\frac{\pi}{6}) \\ \vec{r}_3 = (x_3, y_3) & = & (+d\cos\frac{\pi}{6}, +d\sin\frac{\pi}{6}) \end{array} \right. \tag{5}$$

ossia

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} V_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} k \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \tag{6}$$

Osserviamo che

$$|\vec{r}-\vec{r}_i| = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \tag{7}$$

Pertanto

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{Q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \tag{8}$$

dove le coordinate x_i e y_i delle tre cariche sono date dalla (5).

2. Per calcolare il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$ utilizziamo

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \tag{9}$$

Inserendo la (8) nella (9) otteniamo

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{3} Q_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \right) \tag{10}$$

osserviamo che

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2(x-x_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^{3/2}}, \frac{2(y-y_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^{3/2}} \right) = \\ &= -\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} (x-x_i,\, y-y_i) \end{aligned} \tag{11}$$

Sostituendo (11) in (10) otteniamo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} (x-x_i,\, y-y_i) = \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} (x-x_1\,,\, y-y_1) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Q}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} (x-x_2\,,\, y-y_2) - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4Q}{|\vec{r}-\vec{r}_3|^3} (x-x_3\,,\, y-y_3) \end{aligned} \tag{13}$$

Valutiamo ora il campo elettrico nell'origine. Specifichiamo dunque ill risultato (13), valido per un qualunque punto del piano $\vec{r}=(x,y)$, all'origine $\vec{r}=(0,0)$. In tal caso abbiamo

$$\vec{r}=(0,0) \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{r}-\vec{r}_i| = d \;\; \forall i=1,2,3 \tag{14}$$

Si ottiene

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}=\mathbf{0}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^3}\,(-x_1\,,\,-y_1) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^3}\,(-x_2\,,\,-y_2) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^3}\,(-x_3\,,\,-y_3) = \\
&= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}\,((-x_1\,,\,-y_1) - (-x_2\,,\,-y_2) - 2\,(-x_3\,,\,-y_3)) = \\
&= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}\left(\left(d\cos\frac{\pi}{6}\,,\,-d\sin\frac{\pi}{6}\right) - \left(-d\cos\frac{\pi}{6}\,,\,d\sin\frac{\pi}{6}\right) - 2\left(-d\cos\frac{\pi}{6}\,,\,-d\sin\frac{\pi}{6}\right)\right) = \\
&= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}\left(4d\cos\frac{\pi}{6}\,,\,0\right) = \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{8Q\cos\frac{\pi}{6}}{d^2},\,0\right) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

e dunque il campo elettrico è diretto lungo l'asse x.