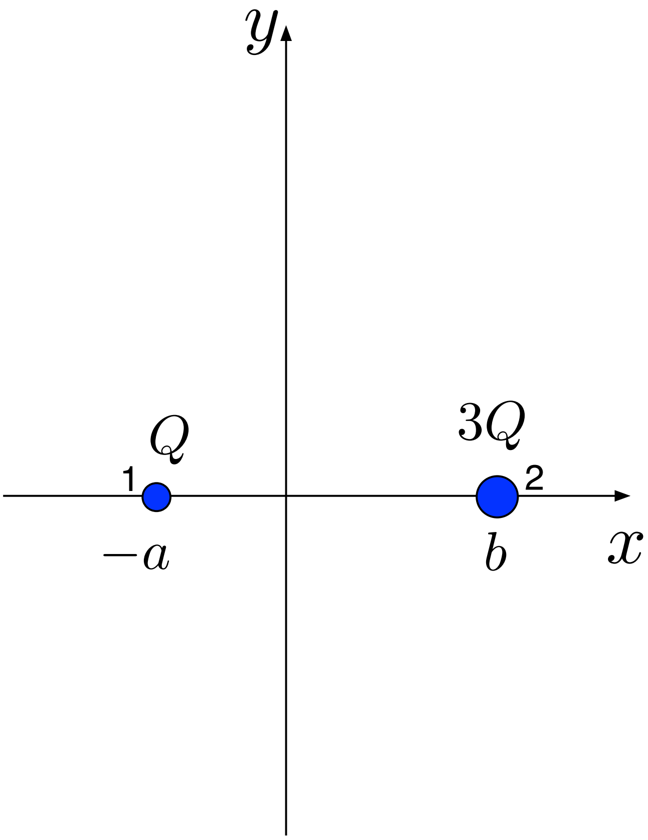
Esercizio

Sul piano xy una carica positiva $Q = 2 \cdot 10^{-3}$C è situata lungo l'asse x nel punto di coordinate $(-a, 0)$ con $a = 10\,\text{cm}$. Una seconda carica $3Q$ è situata sull'asse x positivo, ad una distanza b dall'origine.

1. Determinare il valore di b affiché il campo elettrico nell'origine sia nullo;
2. Usando tale valore di b, determinare il campo elettrico $\vec{E}$ in un punto generico lungo l'asse y



SOLUZIONE

Ogni carica sorgente Q posta in un punto S genera in un punto P dello spazio un campo elettrico dato da

$$\vec{E}(P) = k\,\frac{Q}{r_{SP}^2}\,\hat{u}_{S\to P} \tag{1}$$

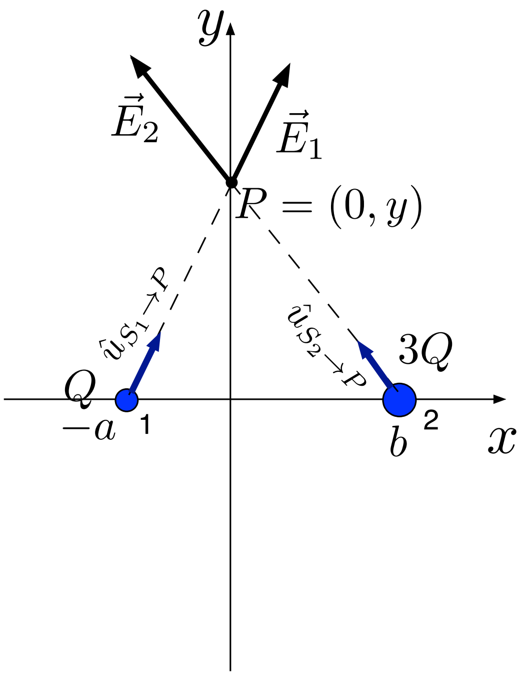
dove

- $\hat{u}_{S\to P}$ è il versore che va dal punto sorgente S al punto P dello spazio;
- $r_{SP} = |\vec{r}_S - \vec{r}_P|$ è la distanza tra la sorgente e il punto P;
- la costante universale k vale
$$k = 8.9875\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \tag{2}$$
e si può anche scrivere equivalentemente come
$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \text{con} \qquad \varepsilon_0 = 8.8542\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N\,m^2}} \tag{3}$$

In questo caso abbiamo due cariche sorgenti, e dunque il campo elettrico totale in ciascun punto dello spazio è dato dalla somma *vettoriale* dei campi elettrici $\vec{E}_1$ ed E_2 prodotti in quel punto da ciascuna delle cariche sorgenti.

1. Iniziamo calcolando il campo elettrico nell'origine $O = (0,0)$. In tale punto il campo elettrico prodotto da Q è diretto verso destra e vale
$$\vec{E}_1(0,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}(1,0) \qquad \text{con} \qquad \hat{u}_{S_1\to O} = (1,0) \tag{4}$$
mentre il campo elettrico prodotto da $3Q$ è diretto verso sinistra e vale
$$\vec{E}_2(0,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{b^2}(-1,0) \qquad \text{con} \qquad \hat{u}_{S_2\to O} = (-1,0) \tag{5}$$
Dunque il campo elettrico totale nell'origine $(0,0)$ vale
$$\begin{aligned}\vec{E}(0,0) &= \vec{E}_1(0,0) + \vec{E}_2(0,0) = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}(1,0) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{b^2}(1,0) = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a^2} - \frac{3Q}{b^2}\,,0\right)\end{aligned} \tag{6}$$
Pertanto il campo elettrico nell'origine si annulla per
$$\begin{aligned}\frac{Q}{a^2} - \frac{3Q}{b^2} &= 0 \\ &\Downarrow \\ b &= a\sqrt{3}\end{aligned} \tag{7}$$

2. Calcoliamo ora il campo elettrico in un punto generico lungo l'asse y, ossia un punto P di coordinate $(0,y)$



$$
\begin{aligned}
\vec{E}_1(0,y) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2+y^2}\underbrace{(\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}})}_{=\hat{u}_{S_1\to P}} = \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a^2+y^2)^{3/2}}(a,y) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

mentre il campo elettrico prodotto da $3Q$ vale

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_2(0,y) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{b^2+y^2}\underbrace{(-\frac{b}{\sqrt{b^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}})}_{=\hat{u}_{S_2\to P}} = \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{(b^2+y^2)^{3/2}}(-b,y) = \\
&\quad [\text{uso } b=a\sqrt{3} \text{ dalla (7)}] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{(3a^2+y^2)^{3/2}}(-a\sqrt{3},y) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Dunque il campo elettrico totale lungo l'asse y vale

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(0,y) &= \vec{E}_1(0,y)+\vec{E}_2(0,y) = \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{(a^2+y^2)^{3/2}}(a,y)+\frac{3Q}{(3a^2+y^2)^{3/2}}(-a\sqrt{3},y)\right) = \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a}{(a^2+y^2)^{3/2}}-\frac{3a\sqrt{3}}{(3a^2+y^2)^{3/2}}\,,\,\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}}+\frac{3y}{(3a^2+y^2)^{3/2}}\right) \qquad (10)
\end{aligned}
$$