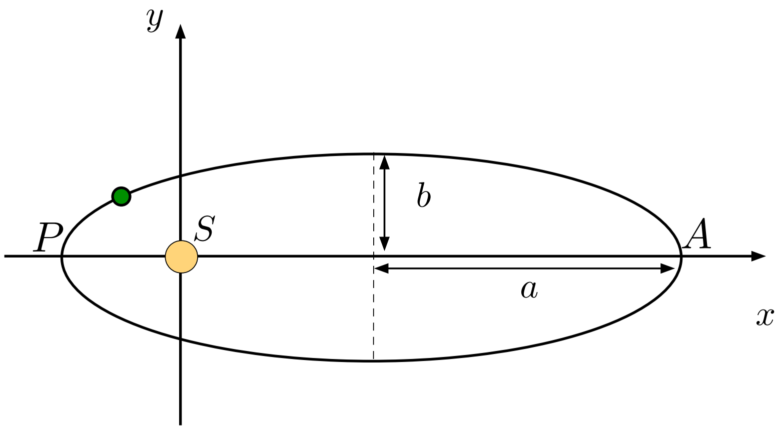
Esercizio
(tratto dal problema 5.6 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

L'orbita ellittica di un pianeta attorno al sole ha due posizioni, l'afelio (A) ed il perielio (P), che stanno agli estremi dell'asse maggiore dell'ellisse, lungo $2a$. L'asse minore è lungo 2b. Detta v_a la velocità del pianeta all'afelio e v_p la velocità al perielio, trovare la relazione tra v_a e v_p in funzione dell'eccentricità $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ dell'orbita.



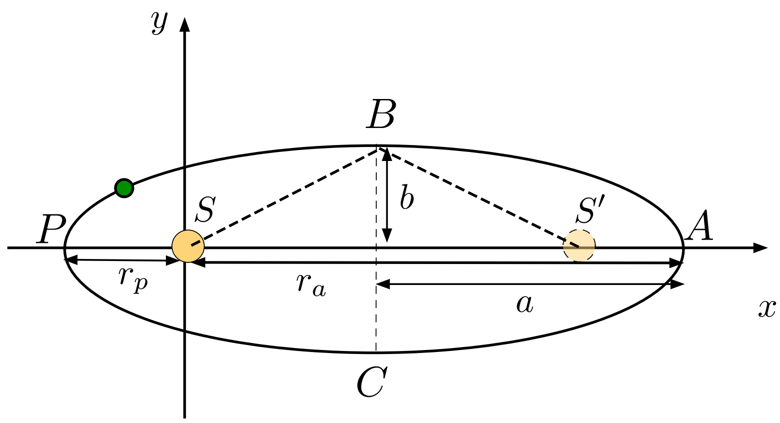
SOLUZIONE

1. Dato che la forza gravitazionale è una forza centrale, il momento angolare $\vec{L}$ si conserva nel tempo ed è diretto perpendicolarmente al piano dell'orbita (dunque nella direzione z perpendicolare al foglio). Pertanto si ha

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{L}_a}_{\text{all'afelio}} &= \underbrace{\vec{L}_p}_{\text{al perielio}} \\ &\Downarrow \qquad\qquad (\vec{L} \text{ sono diretti lungo } z) \\ L_a^z &= L_p^z \end{aligned} \tag{1}$$

Per calcolare L^z all'afelio osserviamo che, essendo $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, all'afelio il vettore posizione $\vec{r}_a$ e la velocità $\vec{v}_a$ sono ortogonali. La stessa cosa accade al perielio. Pertanto la componente z del momento angolare vale

$$\begin{aligned} L_a^z &= L_p^z \\ &\Downarrow \\ r_a\, m v_a &= r_p\, m v_p \\ &\Downarrow \\ v_a &= v_p \frac{r_p}{r_a} \end{aligned} \tag{2}$$



2. L'ellisse è il luogo dei punti per i quali la somma delle distanze tra due punti fissi (detti fuochi) è costante. Il sole S occupa uno dei due fuochi, mentre l'altro fuoco S' è nel punto simmetrico

al sole rispetto al centro dell'ellisse. Pertanto per definizione di ellisse abbiamo (ad esempio) che

$$
\begin{aligned}
\overline{PS} + \overline{PS'} &= \overline{BS} + \overline{BS'} \\
&\Downarrow \\
r_p \;+\; 2a - r_p &= 2\sqrt{(a-r_p)^2 + b^2} \\
&\Downarrow \\
a^2 &= (a-r_p)^2 + b^2 \\
&\Downarrow \\
a - r_p &= \sqrt{a^2 - b^2} \\
&\Downarrow \\
r_p &= a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

da cui ricaviamo

$$r_p = a(1-\epsilon) \tag{4}$$

3. Dalla relazione

$$
\begin{aligned}
r_p + r_a &= 2a \\
&\Downarrow \\
r_a &= 2a - r_p
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ricaviamo subito, sostituendovi la (4), che

$$r_a = 2a - a(1-\epsilon) \tag{6}$$

ossia

$$r_a = a(1+\epsilon) \tag{7}$$

4. Sostituendo ora le relazioni (4) e (7) nell'Eq.(2) otteniamo

$$v_a = v_p \, \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \tag{8}$$