Esercizio

(tratto dal problema 5.4 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Un satellite artificiale, avente velocità di modulo $v_0 = 19.1\,\mathrm{km/s}$ quando è molto distante da un corpo celeste di massa M, possiede la velocità $v = 30\,\mathrm{km/s}$ quando passa ad una distanza r dal centro di M. Lo stesso satellite, se descrivesse un'orbita circolare a tale distanza r dal centro di M, avrebbe un periodo $T = 9.62 \cdot 10^3\,\mathrm{s}$. Calcolare i valori di r e M.

(costante di gravitazione $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$)

SOLUZIONE
Dati noti:

$$
\begin{aligned}
v_0 &= 1.91 \cdot 10^4 \,\mathrm{m/s} \\
v &= 3 \cdot 10^4 \,\mathrm{m/s} \\
T &= 9.62 \cdot 10^3 \,\mathrm{s}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

1. La forza gravitazionale esercitata dal corpo celeste M sul satellite è conservativa. Pertanto l'energia meccanica E_m del satellite è conservata, ossia i valori di E_m quando si trova molto distante dal corpo celeste e quando si trova a distanza r dal suo centro sono uguali

$$
\begin{aligned}
E_m\big|_{\text{distante}} &= E_m\big|_{\text{a distanza } r} \\
&\Downarrow \\
\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{0}_{\text{en. pot. grav}} &= \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{en. cinetica}} \underbrace{-\frac{GMm}{r}}_{\text{en. pot. grav}}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

dove m è la massa del satellite. Da tale relazione ricaviamo

$$
\boxed{v^2 - v_0^2 = \frac{2GM}{r}}
\tag{3}
$$

2. Se il satellite compiesse un'orbita circolare di raggio r, la forza gravitazionale sarebbe:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= m\vec{a} \\
&\Downarrow \\
-G\frac{Mm}{r^2}\,\hat{u}_r &= -m\omega^2\, r\,\hat{u}_r \qquad (\hat{u}_r\text{=versore radiale uscente}) \qquad (4) \\
&\Downarrow \\
\frac{GM}{r^3} &= \omega^2 \\
&\Downarrow \\
\omega &= \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

da cui ricaviamo

$$
\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}}
\tag{6}
$$

3. Le due relazioni (3) e (6) sono due equazioni per le due incognite M e r. Basta pertanto risolvere il sistema

$$
\left\{
\begin{aligned}
v^2 - v_0^2 &= \frac{2GM}{r} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}
\end{aligned}
\right.
\tag{7}
$$

per determinare r e M.
Moltiplicando e dividendo per r^2 il membro destro della prima equazione, e prendendo il reciproco della seconda equazione (elevata al quadrato) si ottiene

$$
\left\{
\begin{aligned}
v^2 - v_0^2 &= 2r^2 \cdot \frac{GM}{r^3} \\
\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 &= \frac{GM}{r^3}
\end{aligned}
\right.
\tag{8}
$$

Sostituendo ora la seconda equazione nella prima,

$$v^2 - v_0^2 = 2r^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{9}$$

ricaviamo

$$r = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{v^2 - v_0^2}{2}} \tag{10}$$

Sostituendo ora i valori otteniamo

$$\begin{aligned} r &= \frac{9.62 \cdot 10^3\,\mathrm{s}}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(3 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(1.91 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2}} = \\ &= \frac{9.62 \cdot 10^3\,\cancel{\mathrm{s}}}{2\pi}\sqrt{\frac{9 - 3.648}{2} \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}^2}{\cancel{\mathrm{s}^2}}} = \\ &= 2.50 \cdot 10^7\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{11}$$

4. Dalla seconda equazione di (8) otteniamo ora

$$M = \frac{r^3}{G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{12}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} M &= \frac{\left(2.50 \cdot 10^7\,\cancel{\mathrm{m}}\right)^3}{6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\cancel{\mathrm{m}^3}}{\mathrm{kg}\,\cancel{\mathrm{s}^2}}}\left(\frac{2\pi}{9.62 \cdot 10^3\,\cancel{\mathrm{s}}}\right)^2 = \\ &= 1 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg} \end{aligned} \tag{13}$$