

Esercizio

(tratto dagli esempi 5.3 e 5.4 del cap. V del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Un satellite artificiale di massa $m = 10^3$ kg ruota attorno alla Terra descrivendo un'orbita circolare di raggio $r_1 = 6.6 \cdot 10^3$ km.

1. Calcolare il periodo T_1 dell'orbita del satellite

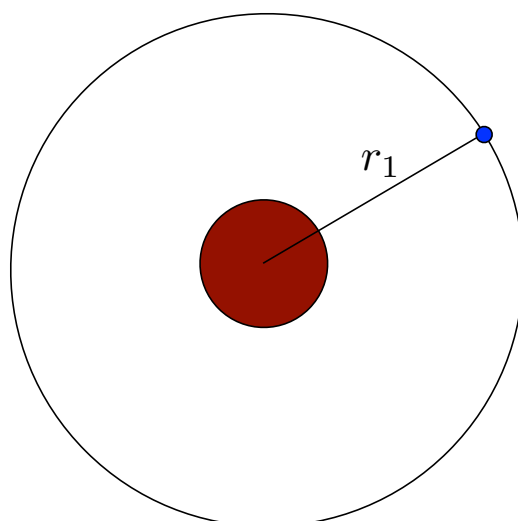
Per migliorare la trasmissione tra satellite e Terra, emerge la necessità di portare il satellite ad un'orbita circolare diversa.

La prima opzione è quella di portare il satellite su un'orbita circolare di raggio $r_2 = 7.1 \cdot 10^3$ km

2. calcolare di quanti minuti e secondi il periodo dell'orbita varia rispetto a quello originaria;
3. calcolare il lavoro che è necessario fornire per eseguire tale operazione;

Una seconda opzione è quella di portare il satellite a descrivere un'orbita circolare di raggio r'_2 e di periodo T'_2 più lungo di 4 minuti rispetto a T_1 .

4. calcolare la differenza di raggio tra le due orbite;
5. calcolare il lavoro che è necessario fornire per eseguire tale operazione, e stabilire quale opzione è energeticamente più conveniente.



(costante di gravitazione $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$; massa della Terra $M = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg)

SOLUZIONE**Dati noti:**

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 6.6 \cdot 10^3 \text{ km} = 6.6 \cdot 10^6 \text{ m} \\
 r_2 &= 7.1 \cdot 10^3 \text{ km} = 7.1 \cdot 10^6 \text{ m} \\
 m &= 10^3 \text{ kg} \\
 G &= 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \\
 M &= 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Consideriamo un'orbita circolare generica di raggio r . Applicando le equazioni della dinamica al caso della forza gravitazionale, e indicando con \vec{u}_r il versore radiale, otteniamo

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

dove:

- \vec{F} è la forza di attrazione gravitazionale

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r \quad (2)$$

- \vec{a} è l'accelerazione che, essendo il moto orbitale del satellite circolare uniforme, ha solo componente radiale centripeta

$$\vec{a} = \vec{a}_r = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r$$

Pertanto

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (3)$$

ossia

$$\boxed{G \frac{M}{r} = v^2} \quad (4)$$

Questa relazione vale per una qualunque orbita circolare, e lega la velocità tangenziale al raggio r di tale orbita.

Ricordando che nel moto circolare uniforme vale

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T} \quad (5)$$

dove T è il periodo dell'orbita, e sostituendo nell'Eq.(4), si ricava

$$G \frac{M}{r} = (2\pi)^2 \frac{r^2}{T^2} \quad (6)$$

e dunque

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}} \quad (7)$$

Anche questa relazione vale per una qualunque orbita circolare, e lega il periodo al raggio r di tale orbita.

1. Applicando la formula (7) al caso dell'orbita di raggio r_1 si ottiene

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{GM}} = \\
 &= 2\pi\sqrt{\frac{(6.6 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = \\
 &= 5334 \text{ s}
 \end{aligned} \tag{8}$$

che si può anche scrivere come

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 5334 \text{ s} = 3600 \text{ s} + 28 \cdot 60 \text{ s} + 54.36 \text{ s} = \\
 &= 1 \text{ h } 28 \text{ min } 54.36 \text{ s}
 \end{aligned} \tag{9}$$

OPZIONE 1

2. La nuova orbita ha un raggio r_2 . Applicando la formula (7) al caso dell'orbita di raggio r_2 si ottiene

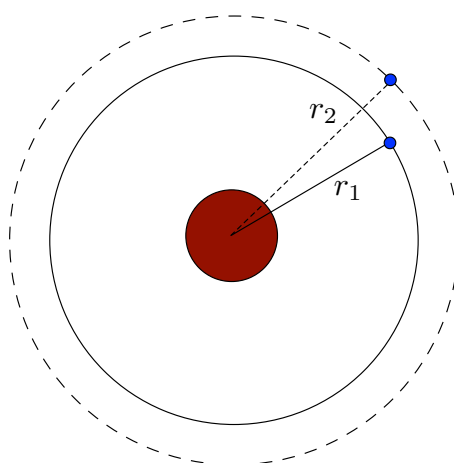
$$\begin{aligned}
 T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{r_2^3}{GM}} = \\
 &= 2\pi\sqrt{\frac{(7.1 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = \\
 &= 5952 \text{ s}
 \end{aligned} \tag{10}$$

e quindi la differenza tra i periodi è

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 5952 \text{ s} - 5334 \text{ s} = 618 \text{ s} \tag{11}$$

ossia

$$\Delta T = 10 \text{ min } 18 \text{ s} \tag{12}$$



3. L'energia meccanica di un corpo m su un'orbita di raggio r è

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{cinetica } E_K} - \underbrace{G\frac{Mm}{r}}_{\text{pot. gravit. } E_P} \tag{13}$$

Ricordando l'Eq.(4) abbiamo che

$$v^2 = G \frac{M}{r} \quad \rightarrow \quad E_K = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} \quad (14)$$

ossia l'energia cinetica del satellite dipende dal raggio dell'orbita. L'energia meccanica totale relativa ad un satellite su orbita di raggio r vale dunque

$$E_K = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} \quad E_P = -G \frac{Mm}{r} \quad \rightarrow \quad E_m = E_K + E_P = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} \quad (15)$$

NOTA BENE:

Dalla (15) si nota che:

- in un'orbita circolare l'energia cinetica E_K (positiva) è in valore assoluto la metà dell'energia potenziale E_P (negativa). Pertanto l'energia meccanica E_m (data dalla somma algebrica delle due) è negativa e pari alla metà di E_P .
- L'energia meccanica (15) dipende dal raggio r dell'orbita. Per cambiare orbita è dunque necessario variare l'energia meccanica del satellite.

Infatti, per il teorema dell'energia cinetica il lavoro W è pari alla variazione dell'energia *cinetica* (non meccanica). Tuttavia tale lavoro W si riferisce alle forze *totali*, che comprendono sia le forze esterne che quelle gravitazionali. Dato che queste ultime sono conservative, il lavoro W_{grav} dovuto ad esse è pari alla variazione dell'energia potenziale gravitazionale (con un segno -). Esplicitamente

$$W = \Delta E_K \quad (16)$$

ossia

$$W_{ext} + W_{grav} = E_{K,2} - E_{K,1} \quad (17)$$

con

$$W_{grav} = -\Delta E_P = -(E_{P,2} - U_{P,1}) \quad (18)$$

da cui

$$W_{ext} = \Delta E_K + \Delta E_P = \Delta E_m = E_{m,2} - E_{m,1} \quad (19)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} W_{ext} &= E_{m,2} - E_{m,1} = \\ &= -G \frac{Mm}{2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \\ &= -6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 10^3 \text{ kg}}{2} \left(\frac{1}{7.1 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{1}{6.6 \cdot 10^6 \text{ m}} \right) = \\ &= 2.13 \cdot 10^9 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = \\ &= 2.13 \cdot 10^9 \text{ J} \end{aligned} \quad (20)$$

OPZIONE 2

4. la nuova orbita ha un periodo più lungo. Invertendo la formula (7) in favore del raggio si ottiene

$$r = \left(\frac{GMT^2}{(2\pi)^2} \right)^{1/3} \quad (21)$$

Un'orbita con un periodo di 4 minuti più lungo,

$$T'_2 = T_1 + 4 \times 60 \text{ s} = 5574 \text{ s} \quad (22)$$

ha dunque un raggio

$$\begin{aligned} r'_2 &= \left(\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} (5574 \text{ s})^2}{(2\pi)^2} \right)^{1/3} = \\ &= 6.8 \cdot 10^6 \text{ m} = \\ &= 6.8 \cdot 10^3 \text{ km} \end{aligned} \quad (23)$$

e dunque la differenza tra i raggi è

$$\begin{aligned} \Delta r &= r'_2 - r_1 = \\ &= 6.8 \cdot 10^3 \text{ km} - 6.6 \cdot 10^3 \text{ km} = \\ &= 0.2 \cdot 10^3 \text{ km} \end{aligned} \quad (24)$$

5. Calcoliamo il lavoro come differenza tra le energie meccaniche che competono alle due orbite, utilizzando l'Eq.(15),

$$\begin{aligned} W'_{ext} &= E'_{m,2} - E_{m,1} = \\ &= -G \frac{Mm}{2} \left(\frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \\ &= -6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 10^3 \text{ kg}}{2} \left(\frac{1}{6.8 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{1}{6.6 \cdot 10^6 \text{ m}} \right) = \\ &= 0.89 \cdot 10^9 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = \\ &= 0.89 \cdot 10^9 \text{ J} \end{aligned} \quad (25)$$

Questa seconda opzione è energeticamente più conveniente.