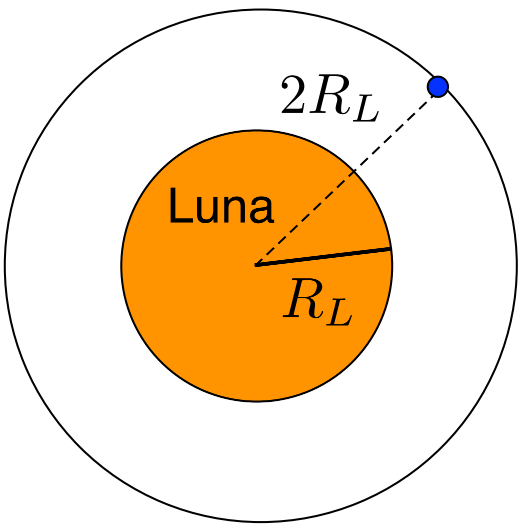
Esercizio

(tratto dall'esercizio 5.1 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Il raggio della Luna è $R_L = 1.74 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$. Un satellite artificiale che orbita attorno alla Luna su un'orbita circolare di raggio $2R_L$ ha un periodo di $306.8\,\mathrm{min}$. Calcolare:

1. la massa della Luna;
2. il valore dell'accelerazione di gravità g_L sulla superficie lunare;
3. la velocità di fuga dalla Luna

(costante di gravitazione $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$)



SOLUZIONE
Dati noti (qui li converto in unità del Sistema Internazionale):
$R_L = 1.74 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$
$T = 306.8\,\mathrm{min} = 306.8 \times 60\,\mathrm{s} = 18408\,\mathrm{s}$
$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}} = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\,s^2}}$

Consideriamo un'orbita circolare generica di raggio r. Applicando le equazioni della dinamica al caso della forza gravitazionale, e indicando con $\vec{u}_r$ il versore radiale, otteniamo

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

dove:

- $\vec{F}$ è la forza di attrazione gravitazionale

$$\vec{F} = \vec{F}_{grav} = -G\frac{M_L\,m}{r^2}\,\vec{u}_r \tag{2}$$

  dove M_L è la massa della Luna, e m la massa del satellite.

- $\vec{a}$ è l'accelerazione che, essendo il moto orbitale del satellite circolare *uniforme*, ha solo componente radiale centripeta

$$\vec{a} = \vec{a}_r = -\omega^2 r\,\vec{u}_r \tag{3}$$

Sostituendo le Eq.(2) e (3) nell'Eq.(1) e ricordando che il satellite compie un'orbita che dista $r = 2R_L$ dal centro della Luna, l'Eq.(1) diventa:

$$\begin{aligned}
-G\frac{M_L\,m}{(2R_L)^2}\,\hat{u}_r &= -m\omega^2(2R_L)\,\hat{u}_r \\
&\Downarrow \\
G\frac{M_L}{4R_L^2} &= 2\omega^2 R_L \\
&\Downarrow \\
M_L &= \frac{8\omega^2 R_L^3}{G} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Possiamo ora rispondere alle varie domande:

1. Ricordando che il periodo T dell'orbita è legato alla velocità angolare tramite $\omega = \frac{2\pi}{T}$, e sostituendo tale espressione nell'Eq.(4), otteniamo

$$\boxed{M_L = 32\pi^2\,\frac{R_L^3}{G\,T^2}} \tag{5}$$

   Sostituendo i valori otteniamo:

$$\begin{aligned}
M_L &= 32\pi^2\,\frac{R_L^3}{G\,T^2} = \\
&= 32\pi^2\,\frac{(1.74 \cdot 10^6\,\cancel{\mathrm{m}})^3}{6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\cancel{\mathrm{m}^3}}{\mathrm{kg}\,\cancel{\mathrm{s}^2}}\,(18408\,\cancel{\mathrm{s}})^2} = \\
&= 32\pi^2\frac{(1.74)^3}{6.67 \cdot (18408)^2}\cdot 10^{18+11}\,\mathrm{kg} = \\
&= 7.36 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg} \qquad (6)
\end{aligned}$$

2. Dall'espressione generale della forza gravitazionale (2) ad una distanza r dal centro della Luna si vede che, sulla superficie lunare ($r = R_L$), tale forza vale

$$\vec{F}_{grav} = -G\frac{M_L\,m}{R_L^2}\,\vec{u}_r = m\underbrace{\left(G\frac{M_L}{R_L^2}\right)}_{=g_L}\hat{u}_r \qquad (7)$$

dove

$$\begin{aligned} g_L &= \frac{G\,M_L}{R_L^2} = \\ &= \frac{6.67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^{\cancel{3}}}{\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{s}^2}\cdot 7.36\cdot 10^{22}\,\cancel{\mathrm{kg}}}{(1.74\cdot 10^6\,\cancel{\mathrm{m}})^2} = \\ &= \frac{6.67\cdot 7.36}{(1.74)^2}\,10^{-11+22-12}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 1.62\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad (8) \end{aligned}$$

da confrontarsi con $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$ sulla Terra.

3. La velocità di fuga è la velocità che un corpo deve avere sulla superficie della Luna per potersi sottrarre all'attrazione gravitazionale della Luna, ossia per arrivare all'infinito con velocità nulla. Dato che la forza gravitazionale è conservativa, l'energia meccanica si conserva e si ha

$$\begin{aligned} E_m(\text{sup.Luna}) &= E_m(\infty) \\ &\Downarrow \\ \underbrace{\frac{1}{2}mv_f^2}_{E_k} + \underbrace{\left(-G\frac{M_L m}{R_L}\right)}_{E_p} &= 0+0 \qquad (9) \end{aligned}$$

da cui

$$v_f = \sqrt{\frac{2G\,M_L}{R_L}} \qquad (10)$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{\frac{2G\,M_L}{R_L}} = \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{s}^2}\cdot 7.36\cdot 10^{22}\,\cancel{\mathrm{kg}}}{1.74\cdot 10^6\,\mathrm{m}}} = \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 6.67\cdot 7.36}{1.74}\,10^{-11+22-6}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= \sqrt{56.42\,\cdot\,10^5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= 2375\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (11) \end{aligned}$$