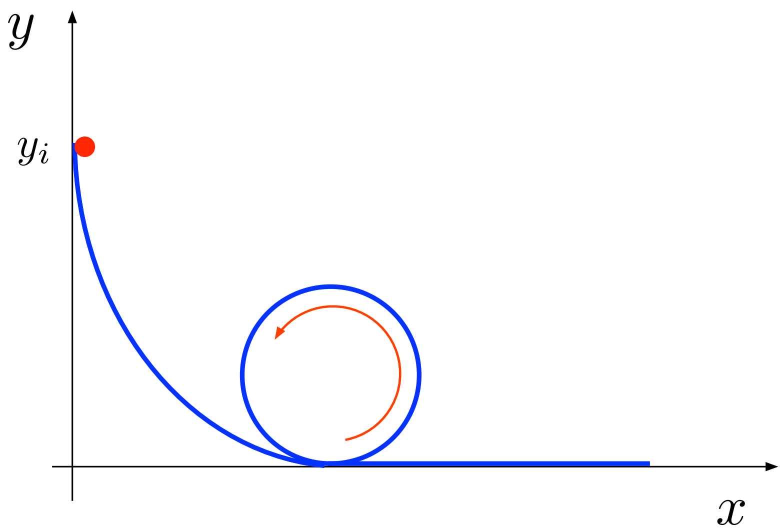
Esercizio

Un pallina di massa m scivola con attrito trascurabile su una guida che forma il cerchio della morte. La pallina parte da ferma dal punto di coordinata $y_i = 4R$ (dove R è il raggio del cerchio). Determinare:

1. il modulo della velocità della pallina nel punto più alto del cerchio;
2. la forza normale che la guida esercita sulla pallina in tale punto;
3. la minima altezza da cui deve partire la pallina per compiere il giro completo del cerchio senza staccarsi da esso



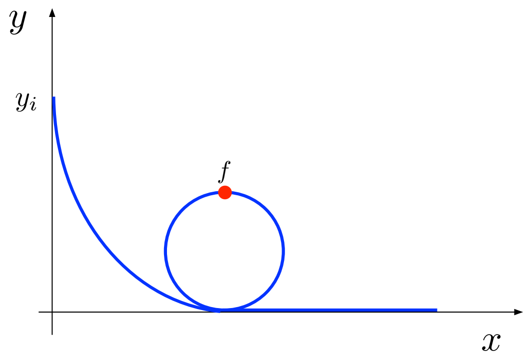
SOLUZIONE

1. Ci chiediamo anzitutto se vale la conservazione dell'energia meccanica. Sulla guida non c'è attrito, e le forze che agiscono sulla pallina sono:

   -forza peso (conservativa);

   -reazione vincolare della guida (sempre ortogonale allo spostamento, non compie lavoro, quindi dal punto di vista del bilancio energetico è come se non ci fosse);

   Pertanto vale la conservazione dell'energia meccanica.



   L'energia meccanica nel punto iniziale 'i' è uguale a quella del punto 'f' alla sommità del cerchio

$$\begin{aligned} E_m^i &= E_m^f \\ &\Downarrow \\ 0 + mg\,y_i &= \frac{1}{2}mv_f^2 + mg\,y_f \\ &\Downarrow \\ mg\,4R &= \frac{1}{2}mv_f^2 + mg\,2R \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}v_f^2 &= g\,2R \end{aligned} \tag{1}$$

   da cui si ricava

$$v_f = \sqrt{4gR} \tag{2}$$

2. Dato che la pallina compie un moto circolare, nel punto 'f' esiste certamente un'accelerazione centripeta a_c, data da

$$a_c = \frac{v_f^2}{R} = \frac{4gR}{R} = 4g \tag{3}$$

   e diretta lungo y verso il basso. Per la seconda legge della dinamica, tale forza è dovuta alla componente verticale della forza totale agente sulla pallina. Esistono due forze che agiscono sulla pallina:
   -la forza peso $m\vec{g} = -mg\hat{u}_y$ (diretta verso il basso);
   -la reazione vincolare $\vec{N} = -N\hat{u}_y$ della guida (che nel punto apicale 'f' è diretta verso il basso)

Pertanto nel punto 'f' abbiamo

$$
\begin{aligned}
F_y &= ma_y \\
&\Downarrow \\
-(N+mg) &= m(-a_c) \\
&\Downarrow \\
N = ma_c - mg & \qquad (4)
\end{aligned}
$$

usando la l'Eq.(3) si ottiene

$$N = 3mg \tag{5}$$

3. Consideriamo ora un punto generico P della traiettoria lungo la guida, identificato da un angolo θ rispetto all'asse orizzontale passante per il centro del cerchio

$$\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \qquad \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{2} & \text{(punto d'ingresso nel cerchio)} \\ \theta = \frac{3\pi}{2} & \text{(punto d'uscita dal cerchio)} \end{cases}$$

- Sfruttando la conservazione dell'energia meccanica possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
E_m^i &= E_m^P \\
&\Downarrow \\
0 + mg\, y_i &= \frac{1}{2} m v_P^2 + mg\, \underbrace{(R + R\sin\theta)}_{=y_P} \\
&\Downarrow \\
\frac{1}{2} v_P^2 &= g\,(y_i - R - R\sin\theta) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

  da cui si ricava

$$v_P = \sqrt{2g(y_i - R - R\sin\theta)} \tag{7}$$

- D'altra parte, dato che il moto è circolare, nel punto P l'accelerazione ha certamente (almeno) la componente centripeta $\vec{a}_r$ (=diretta verso il centro del cerchio). Indicando con $\hat{u}_r$ il versore radiale uscente dal centro, abbiamo

$$\vec{a}_r = -\frac{v_P^2}{R}\,\hat{u}_r \tag{8}$$

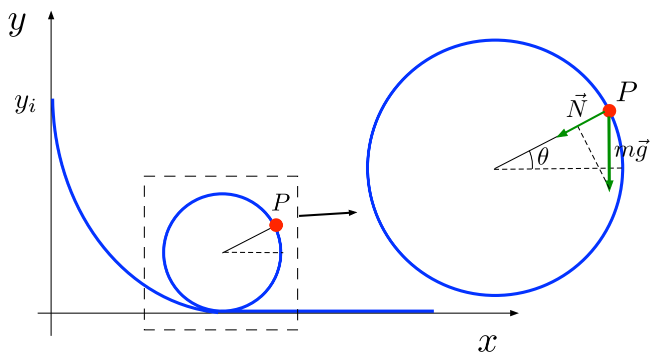
- Di nuovo, per la seconda legge della dinamica, tale accelerazione centripeta è dovuta dalla componente centripeta $\vec{F}_r$ della forza totale che agisce sulla particella

$$\vec{F}_r = m\vec{a}_r \tag{9}$$

- La forza centripeta totale $\vec{F}_r$ è data dalla somma della componente centripeta della forza peso (che è diretta verso il basso) e dalla reazione vincolare $\vec{N} = -N\hat{u}_r$ (che è incognita, ma che è diretta verso il centro)

$$\vec{F}_r = -(mg\sin\theta + N)\hat{u}_r \tag{10}$$

  Inserendo le equazioni (8) e (10) nell'Eq.(9) si ottiene



$$
\begin{aligned}
-(mg\sin\theta + N)\hat{u}_r &= -m\frac{v_P^2}{R}\,\hat{u}_r \\
&\Downarrow \\
mg\sin\theta + N &= m\frac{v_P^2}{R} \\
&\Downarrow \\
N &= m\frac{v_P^2}{R} - mg\sin\theta \qquad (11)
\end{aligned}
$$

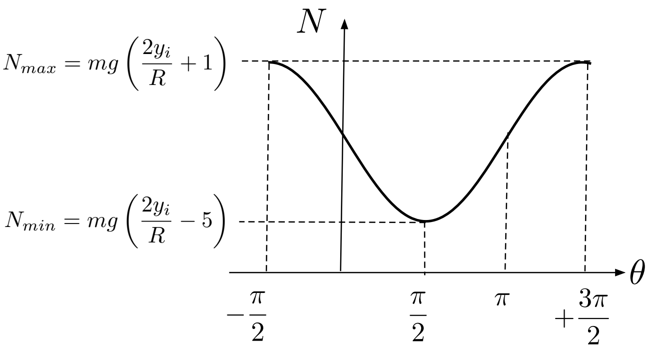
Inserendo l'Eq.(7) nell'Eq.(11) si ottiene l'espressione della reazione vincolare N nel generico punto P della traiettoria identificato dall'angolo θ

$$N = \frac{2mg(y_i - R - R\sin\theta)}{R} - mg\sin\theta \qquad (12)$$

ossia

$$N = mg\left(\frac{2y_i}{R} - 2 - 3\sin\theta\right) \qquad (13)$$

ed è disegnata nella figura in funzione dell'angolo θ



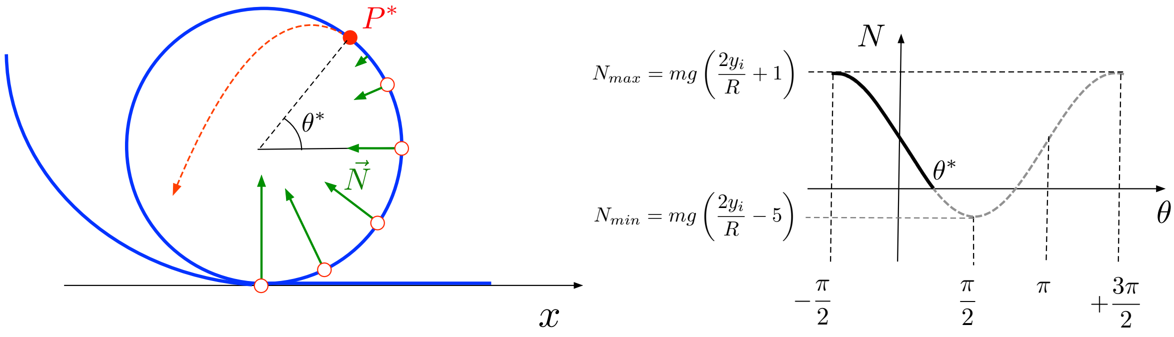
- Osserviamo che i punti in cui la reazione vincolare N è massima sono quelli in cui la pallina entra nella guida ($\theta = +\pi/2$) ed esce dalla guida ($\theta = 3\pi/2$),

$$N_{max} = mg\left(\frac{2y_i}{R} + 1\right) \qquad (14)$$

mentre quello in cui la reazione vincolare è minima è quello che corrisponde all'angolo $\theta = \pi/2$, ossia la sommità del cerchio.

$$N_{min} = mg\left(\frac{2y_i}{R} - 5\right) \qquad (15)$$

- Affinché la pallina rimanga attaccata alla guida, occorre che per *ciascun punto* P (ossia per ciascun angolo θ) il valore di N sia *positivo* (=la reazione vincolare $\vec{N} = -N\hat{u}_r$ sia diretta *verso* il centro). Infatti, se esiste un angolo θ^* (ossia un punto P^*) nel quale la reazione vincolare N si annulla (come indicato in figura qui sotto), dal punto di vista della pallina la guida non esercita più alcuna forza, ed è come se la guida stessa sparisse. La pallina si muoverebbe da quel punto in poi sotto l'azione della sola forza peso, e dunque si staccherebbe dalla guida compiendo un moto parabolico.



- Pertanto la pallina rimane sempre attaccata alla guida se

$$
\begin{aligned}
N(\theta) &> 0 \qquad \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right] \\
&\Downarrow \\
N_{min} &> 0 \\
&\Downarrow \\
mg\left(\frac{2y_i}{R}-5\right) &> 0 \\
&\Downarrow \\
\frac{y_i}{R} &> \frac{5}{2}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

e dunque

$$
y_i^{min} = \frac{5}{2}R \tag{17}
$$