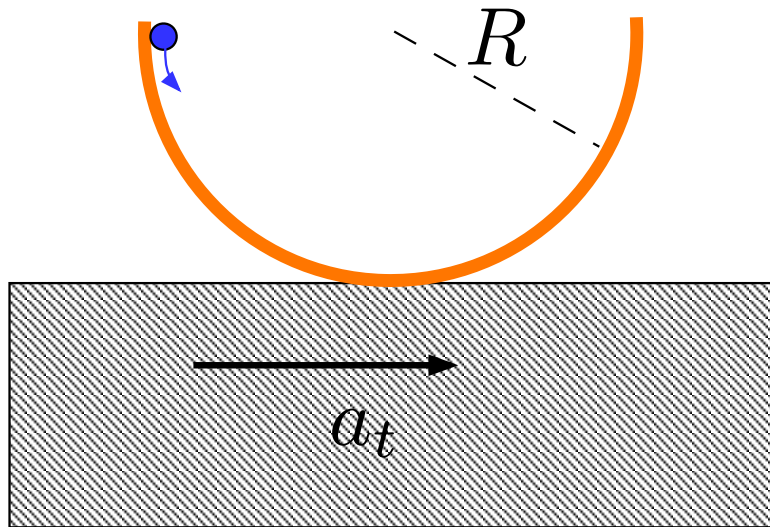


**Esercizio** (tratto dal problema 5.10 del Mazzoldi)

Una guida semicircolare liscia verticale di raggio  $R = 40$  cm è vincolata ad una piattaforma orizzontale che si muove con accelerazione costante  $a_t = 2$  m/s<sup>2</sup> lungo la direzione orizzontale. Un punto materiale, inizialmente fermo sulla guida all'estremo del diametro orizzontale viene lasciato scivolare. Calcolare la velocità  $v_0$  rispetto alla guida quando il corpo giunge nel punto piú basso e confrontarla con il valore che si ottiene quando la guida è ferma.



## SOLUZIONE

### Dati iniziali:

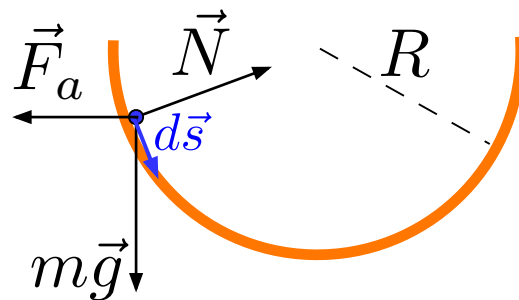
$$\begin{aligned} R &= 0.4 \text{ m (abbiamo riscritto i dati in unità del S.I. } 40 \text{ cm} \rightarrow 0.4 \text{ m)} \\ a_t &= 2 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Consideriamo il sistema di riferimento della piattaforma, in cui la guida è ferma. Siccome tale sistema è in moto accelerato rispetto al sistema inerziale del laboratorio, il sistema della piattaforma NON è un sistema di riferimento inerziale. Pertanto non possiamo applicare le usuali leggi della dinamica  $\vec{F} = m\vec{a}$  che riguardano le forze reali e da cui derivano, tra l'altro, i teoremi sull'energia meccanica. Nel caso presente le forze reali che agiscono sul punto materiale sono:

- forza peso  $m\vec{g}$
- reazione vincolare  $\vec{N}$  della guida

Possiamo tuttavia considerare che, nel sistema di riferimento della piattaforma, il punto materiale sia soggetto, oltre alle forze reali, ad un'ulteriore forza apparente che origina puramente dalla non-inerzialità del sistema

- $\vec{F}_a = -m\vec{a}_t$



Con questa precauzione possiamo scrivere:

$$\vec{F}' = m\vec{a} \quad (1)$$

dove

$$\vec{F}' = \vec{F}_{\text{peso}} + \vec{N} + \vec{F}_a \quad (2)$$

è la somma di *tutte* le forze (reali ed apparenti) viste dal sistema della piattaforma, e  $\vec{a}$  è l'accelerazione del punto materiale calcolata nel sistema di riferimento della piattaforma. Formalmente l'Eq.(1) è uguale alla seconda legge della dinamica. Da essa, come è noto, discende il teorema dell'energia cinetica:

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= m\vec{a} \\ \Downarrow \\ W' &= \Delta K \end{aligned} \quad (3)$$

dove

$$W' = \int \vec{F}' \cdot d\vec{s} \quad (4)$$

$\Delta K$  è la variazione di energia cinetica nel sistema di riferimento della piattaforma e  $W$  è il lavoro eseguito dal campo di forze  $\vec{F}'$  (reali+apparenti):

$$W' = \underbrace{W_{\text{peso}}}_{\text{lavoro della forza peso}} + \underbrace{W_a}_{\text{lavoro della forza apparente}} + \underbrace{W_N}_{\text{lavoro della reazione vincolare}} \quad (5)$$

Osserviamo che il lavoro  $W_N$  della reazione vincolare è nullo, dato che, istante per istante, tale forza  $\vec{N}$  è sempre ortogonale allo spostamento infinitesimo

$$\delta W_N = \vec{N} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow W_N = 0 \quad (6)$$

Pertanto, ai fini del bilancio energetico, la reazione vincolare non conta perché non compie lavoro. La forza *efficace* che conta per il teorema dell'energia cinetica è

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{eff}} &= \vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_a = \\ &= -mg\vec{u}'_z - ma_t\vec{u}'_x \end{aligned} \quad (7)$$

dove  $\vec{u}'_x$  e  $\vec{u}'_z$  sono i versori lungo gli assi nel sistema di riferimento della piattaforma. Da (3) e (6) possiamo scrivere

$$W_{\text{eff}} = \Delta K \quad (8)$$

dove  $W_{\text{eff}}$  è il lavoro della forza efficace  $\vec{F}_{\text{eff}}$ .

- Ci chiediamo ora se la forza  $\vec{F}_{\text{eff}}$  sia conservativa, ossia se esista un'energia potenziale  $E_p$  tale che

$$\vec{F}_{\text{eff}} = -\vec{\nabla} E_p \quad (9)$$

Se così fosse, potremmo scrivere

$$W_{\text{eff}} = -\Delta E_p \quad (10)$$

e l'Eq.(8) implicherebbe

$$\Delta(K + E_p) = 0 \quad (11)$$

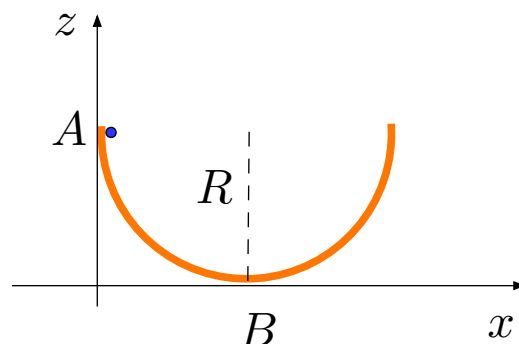
ossia la conservazione dell'energia meccanica

$$E_m = K + E_p \quad (12)$$

anche nel sistema non inerziale della piattaforma! Questa legge di conservazione renderebbe molto semplice la risoluzione del problema.

- Vediamo dunque se esiste una funzione  $E_p$  tale che

$$\vec{F}_{\text{eff}} = -\vec{\nabla} E_p \quad (13)$$



Definiamo dunque un sistema di assi nel sistema della piattaforma come in figura, dove  $x = 0$  corrisponde alla coordinata longitudinale del punto di caduta iniziale. Dall'Eq.(13)

$$-mg\vec{u}'_z - ma_t\vec{u}'_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}'_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}'_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}'_z \quad (14)$$

Uguagliando componente per componente

$$\begin{cases} F_{\text{eff},x} = -ma_t = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \Rightarrow E_p = ma_t x + \text{cost. in } x \\ F_{\text{eff},y} = 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \Rightarrow E_p = \text{cost. in } y \\ F_{\text{eff},z} = -mg = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \Rightarrow E_p = mgz + \text{cost. in } z \end{cases} \quad (15)$$

E' facile vedere che queste equazioni sono tra loro compatibili (in generale non è detto che lo siano, la forza potrebbe non essere conservativa), e che l'energia potenziale è

$$E_p(x, z) = \underbrace{mgz}_{\substack{\text{energia pot.} \\ \text{gravitazionale}}} + \underbrace{ma_t x}_{\substack{\text{energia pot.} \\ \text{apparente}}} \quad (16)$$

(si potrebbe anche aggiungere a tale espressione per  $E_p$  una qualsiasi quantità costante in  $x, y$  e  $z$ , non cambierebbe nulla)

- Dato che l'energia potenziale esiste, l'energia meccanica vale

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \underbrace{mgz + ma_t x}_{=E_p(x,z)} \quad (17)$$

E applichiamo la conservazione dell'energia [Eq.(11)] nel tratto  $A \rightarrow B$ , ossia dal punto di partenza  $A$  al punto piú basso della guida. Abbiamo

$$E_{m,A} = 0 + mgR + 0 \quad (18)$$

$$E_{m,B} = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 + ma_t R \quad (19)$$

dove  $v_0$  è la velocità nel punto piú basso della guida (notazione del testo).

Uguagliando

$$E_{m,A} = E_{m,B} \quad (20)$$

$$mgR = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 + ma_t R \quad (21)$$

otteniamo

$$v_0 = \sqrt{2(g - a_t)R} \quad (22)$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2(g - a_t)R} = \\ &= \sqrt{2 \left( 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot 0.4 \text{ m}} = \\ &= 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \quad (23)$$

- Nel caso in cui la piattaforma fosse ferma rispetto al sistema del laboratorio

$$a_t = 0$$

avremmo dall'Eq.(22) che

$$v_0 = \sqrt{2gR} \quad (24)$$

**COMMENTO**

Come si vede dall'espressione (22) per  $v_0$ , il risultato ha senso solo se  $a_t \leq g$ . Se infatti la piattaforma viene accelerata troppo (ossia piú forte dell'accelerazione di gravità  $g$ ), il punto materiale non giunge mai al punto piú basso della guida. La forza efficace  $\vec{F}_{eff}$  agisce infatti come una forza peso efficace diretta trasversalmente, il cui punto di equilibrio non si trova dunque sulla verticale. Il punto materiale oscillerebbe in tal caso attorno a tale posizione di equilibrio, determinata dal minimo dell'energia potenziale

$$\begin{aligned} E_p(x, z(x)) &= mgz(x) + ma_t x = \\ &= mg \left( R - \sqrt{2Rx - x^2} + \frac{a_t}{g} x \right) \end{aligned} \quad (25)$$

dove  $z(x)$  è determinata dall'equazione parametrica della guida  $(z - R)^2 + (x - R)^2 = R^2$ .