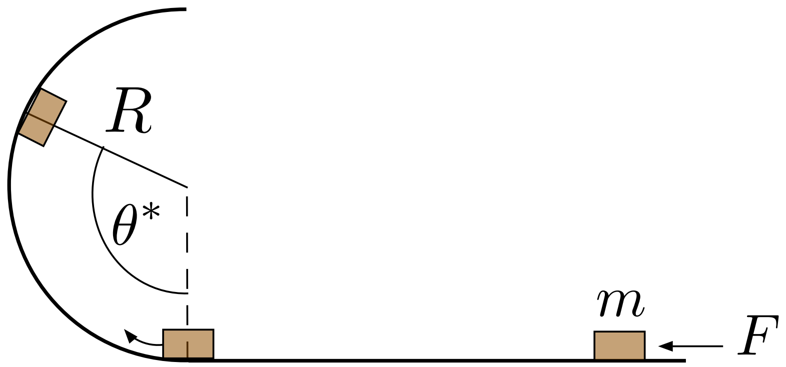
Esercizio (tratto dal problema 2.39 del Mazzoldi)

Ad un blocco di massa $m = 0.5\,\text{kg}$ in quiete viene applicata la forza $F = 470\,\text{N}$ durante l'intervallo di tempo $\Delta t = 10^{-2}\,\text{s}$. A seguito di ciò, il blocco scivola lungo un piano orizzontale liscio e ad un certo istante entra in una guida circolare liscia di raggio $R = 1.6\,\text{m}$.

1. Calcolare la reazione vincolare della guida nell'istante in cui il blocco passa nella posizione individuata dall'angolo 120^o rispetto all'entrata nella guida;

2. Quale dovrebbe essere la velocità all'ingresso della guida affinché il blocco si stacchi dalla guida in corrispondenza dell'angolo di 120^o ?



SOLUZIONE

DATI NOTI:

$$\begin{aligned} m &= 0.5\,\mathrm{kg} \\ F &= 470\,\mathrm{N} \\ \Delta t &= 10^{-2}\,\mathrm{s} \\ R &= 1.6\,\mathrm{m} \\ \theta^* &= 2\pi/3 \end{aligned}$$

1. Nella fase iniziale il blocco si trova a sinistra. Quando è sottoposto ad una forza F per un intervallo di tempo Δt, il suo impulso cambia secondo la legge

$$\Delta p = m v^{dopo} - m v^{prima} \quad = \quad F\,\Delta t \tag{1}$$

La velocità v^{prima} prima dell'applicazione della forza è nulla. La velocità v^{dopo} alla fine dell'intervallo Δt è allora data da

$$v^{dopo} = \frac{F\,\Delta t}{m} \tag{2}$$

Sostituendo i valori otteniamo

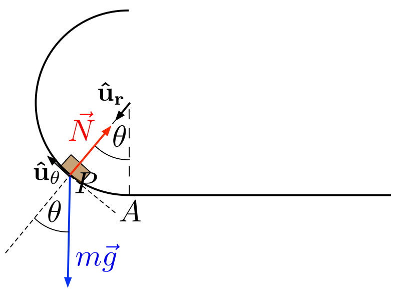
$$\begin{aligned} v^{dopo} &= \frac{470\,\mathrm{N}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}}{0.5\,\mathrm{kg}} = \\ & \quad [\text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}] \\ &= \frac{470\,\frac{\cancel{\mathrm{kg}}\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}}{0.5\,\cancel{\mathrm{kg}}} = \\ &= 9.4\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{3}$$

2. Dato che il piano è liscio, la velocità $v(\theta = 0)$ con la quale il blocco entra nella guida nel punto A è data (in modulo) da

$$v(0) = v^{dopo} = 9.4\,\mathrm{m/s} \tag{4}$$

3. consideriamo ora un generico istante in cui il blocco si trova nella guida circolare in corrispondenza di un angolo θ (vedi figura). Sul blocco agiscono due forze

- il peso $m\vec{g}$ (diretto verso il basso);
- la reazione vincolare $\vec{N}$ della guida (che è diretta radialmente)



Scrivendo le equazioni della dinamica, e scomponendo i vettori lungo le direzioni tangenziale e radiale (versori $\hat{u}_\theta$ e $\hat{u}_r$) otteniamo

$$\begin{aligned} m\vec{g} + \vec{N} &= m\vec{a} \\ &\Downarrow \\ mg\cos\theta\,\hat{u}_r - mg\sin\theta\,\hat{u}_\theta - N\hat{u}_r &= m(a_\theta\,\hat{u}_\theta + a_r\,\hat{u}_r) \end{aligned} \tag{5}$$

Raccogliendo ad ogni membro tutto ciò che moltiplica il versore $\hat{u}_r$ e tutto ciò che moltiplica il versore $\hat{u}_\theta$ e uguagliando componente per componente otteniamo

$$\left\{ \begin{aligned} mg\cos\theta - N &= ma_r \\ -mg\sin\theta &= ma_\theta \end{aligned} \right. \tag{6}$$

4. D'altra parte, trattandosi di un moto circolare, l'accelerazione radiale a_r in corrispondenza di un dato angolo θ è data da

$$a_r = -\frac{v^2(\theta)}{R} \tag{7}$$

dove $v(\theta)$ è il modulo della velocità del blocco nella posizione descritta da quell'angolo. Pertanto, dalla prima delle Eq.(6) si ottiene che la reazione vincolare N in corrispoindenza dell'angolo θ vale

$$N(\theta) = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2(\theta)}{R}\right) \tag{8}$$

5. Per trovare la velocità $v^2(\theta)$ sfruttiamo la conservazione dell'energia meccanica. Osserviamo infatti che

- la forza peso è conservativa;
- la reazione vincolare $\vec{N}$ della guida non compie lavoro perché è radiale, ossia sempre ortogonale allo spostamento: $\int \underbrace{\vec{N}\cdot d\vec{r}}_{=0} = 0$.

Pertanto, indicando con A il punto iniziale e con P il punto in corrispondenza dell'angolo θ

$$\begin{aligned} E_m^A &= E_m^P \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}mv^2(0)\ +0 &= \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mg(R - R\cos\theta) \end{aligned} \tag{9}$$

da cui

$$v^2(\theta) = v^2(0) - 2gR(1-\cos\theta) \tag{10}$$

6. Sostituendo la (10) nella (8)

$$N(\theta) = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2(0)}{R} - 2g(1-\cos\theta)\right) \tag{11}$$

ossia

$$\boxed{N(\theta) = m\left(\frac{v^2(0)}{R} - g(2 - 3\cos\theta)\right)} \tag{12}$$

7. In particolare, all'angolo $\theta^* = 2\pi/3$ otteniamo

$$\begin{aligned} N(\frac{2\pi}{3}) &= 0.5\,\text{kg}\left(\frac{9.4^2\,\frac{\text{m}^{\cancel{2}}}{\text{s}^2}}{1.6\,\cancel{\text{m}}} - 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left(2 - 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right) = \\ &= 0.5\,\text{kg}\left(55.23\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 34.33\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \\ &= 10.4\,\text{kg}\,\text{m/s}^2 = \\ &= 10.4\,\text{N} \end{aligned} \tag{13}$$

8. Osserviamo che la guida esercita una reazione vincolare finché tale reazione è diretta verso il centro della guida, ossia finché N rimane positivo (nella convenzione di segni adottata per N). E' solo in tali condizioni che il blocco esercita una 'pressione' sulla guida. Quando $N = 0$ la guida non esercita più alcuna forza sul blocco (dunque è come se non esistesse). Il blocco dunque si stacca e cade. Dalla formula generale (12) osserviamo che il blocco rimane attaccato alla guida se vale la condizione

$$N(\theta) = m\left(\frac{v^2(0)}{R} - g(2 - 3\cos\theta)\right) \geq 0 \tag{14}$$

ossia finché

$$v(0) \geq \sqrt{gR(2 - 3\cos\theta)} \tag{15}$$

Pertanto la velocità d'ingresso $v(0)$ alla guida per la quale il distacco avvenga esattamente a $\theta^* = 2\pi/3$ vale

$$\begin{aligned} v(0) &= \sqrt{9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 1.6\,\text{m}\left(2 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)\right)} = \\ &= 7.4\,\text{m/s} \end{aligned} \tag{16}$$