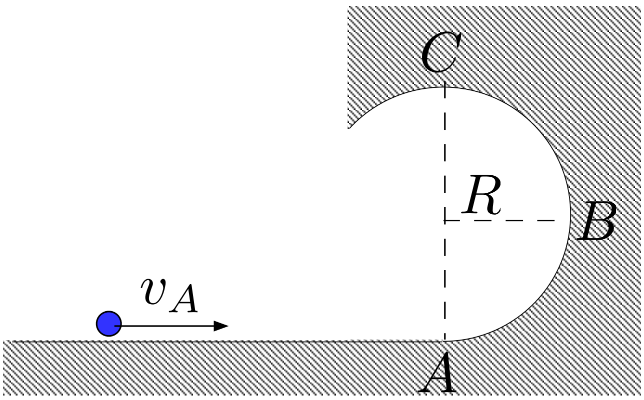
## Esercizio **(tratto dal Problema 4.39 del Mazzoldi 2)**

Un corpo di massa $m = 200\,\mathrm{kg}$ entra con velocità $v_A = 20\,\mathrm{m/s}$ in una guida verticale circolare liscia di raggio $R = 5\,\mathrm{m}$. Calcolare:

1. la velocità nei punti $B$ e $C$;
2. la reazione vincolare della guida nei punti $A$, $B$ e $C$;
3. il valore minimo di $v_A$ affinché il corpo arrivi nel punto $C$ mantenendo il contatto con la guida



**SOLUZIONE**

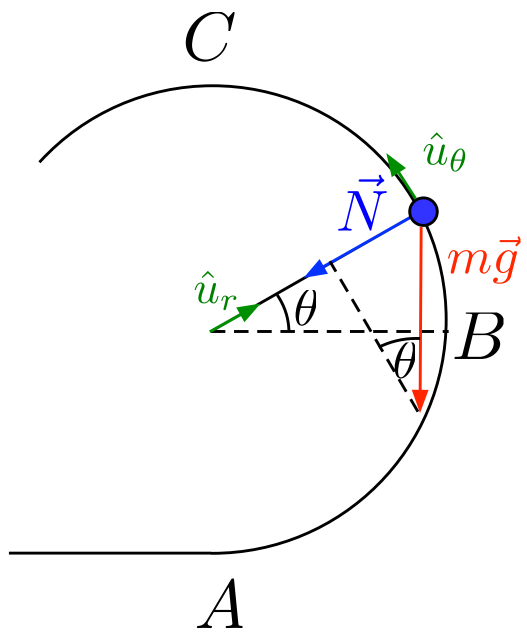
**Dati noti:**
$m = 200\,\text{kg}$
$R = 5\,\text{m}$
$v_A = 20\,\text{m/s}$

1. Per calcolare le velocità nei punti $B$ e $C$ procediamo in questo modo:

- Le forze che agiscono sul punto materiale sono

| | | |
|---|---|---|
| i) forza peso: | $m\vec{g}$ | (diretta verticalmente) |
| ii) reaz. vincolare della guida: | $\vec{N} = -N\,\vec{u}_r$ | (diretta radialmente verso il centro) |

e sono mostrate in figura.




- Osserviamo che la reazione vincolare $\vec{N}$, essendo diretta radialmente, è sempre ortogonale allo spostamento infinitesimo $d\vec{r}$ e dunque non compie lavoro

$$W_{\vec{N}} = \int \underbrace{\vec{N} \cdot d\vec{r}}_{=0} = 0 \qquad (1)$$

Pertanto, dal punto di vista del bilancio energetico è come se non ci fosse.

- Dato che la forza peso è conservativa e la reazione vincolare non compie lavoro possiamo applicare in ogni punto del moto la conservazione dell'energia meccanica

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \qquad (2)$$

Da dove si vede? Dal teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta E_k = \underbrace{W_{peso}}_{\text{lavoro forza peso}} + \underbrace{W_N}_{\text{lavoro reaz. vincolare}} \tag{3}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} W_{peso} &= -\Delta E_p \qquad \text{(perché la forza peso è conservativa)} \\ W_N &= 0 \qquad \text{(perché } \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ istante per istante)} \end{aligned} \tag{4}$$

e quindi

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \qquad \Rightarrow \qquad \Delta(E_k + E_p) = 0 \tag{5}$$

- Per calcolare la velocità nei punti $B$ e $C$ applichiamo la conservazione dell'energia meccanica nei tratti:
  **A $\rightarrow$ B**

$$E_m^A = E_m^B \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \qquad (h_B = R)$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gR}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\left(\frac{20\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 2 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m}} = \\ &= 17.38\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{7}$$

**A $\rightarrow$ C**

$$E_m^A = E_m^C \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C \qquad (h_C = 2R)$$

$$\Rightarrow \quad v_C = \sqrt{v_A^2 - 4gR}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{\left(\frac{20\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 4 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m}} = \\ &= 14.28\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

2. Calcoliamo ora la reazione vincolare

- Consideriamo le forze. Scomponiamo la forza totale $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}$ nelle componenti radiale e tangenziale:

$$\vec{F} = F_r\,\vec{u}_r + F_\theta\,\vec{u}_\theta \tag{9}$$

con

$$\left\{ \begin{aligned} F_r &= -mg\sin\theta - N \\ F_\theta &= -mg\cos\theta \end{aligned} \right. \tag{10}$$

- Consideriamo ora l'accelerazione $\vec{a}$; anch'essa può scomporsi nelle componenti radiali e tangenziali
$$\vec{a} = a_r\,\vec{u}_r + a_\theta\,\vec{a}_\theta \tag{11}$$
Ora, **fintanto che il punto materiale rimane attaccato alla guida**, il suo moto è circolare, e dunque la componente *radiale* dell'accelerazione è data da
$$a_r = -\frac{v^2}{R} \tag{12}$$
dove il segno $-$ indica che è centripeta.

- Dalla seconda legge della dinamica si ha
$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{13}$$
Uguagliando la (9) e la (11) componente per componente
$$\left\{ \begin{array}{lcl} F_r &=& ma_r \\ \\ F_\theta &=& ma_\theta \end{array} \right. \tag{14}$$
e combinando la (12) con la prima delle (10), otteniamo per l'equazione radiale
$$m\frac{v^2}{R} = mg\sin\theta + N \tag{15}$$
ossia
$$N(\theta) = m\left(\frac{v^2}{R} - g\sin\theta\right) \tag{16}$$
Questa equazione (valida *finché il punto rimane attaccato alla guida*) indica che la reazione vincolare $N$ cambia istante per istante a seconda della posizione (identificata dall'angolo $\theta$) e della velocità $v$ del punto materiale. In particolare dunque si ha:

• **in A**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \theta_A &=& -\frac{\pi}{2} \\ v_A &=& 20\,\mathrm{m/s} \end{array} \right.$$

e dunque

$$N_A \;=\; N(\theta_A) = m\left(\frac{v_A^2}{R} - g\sin(-\frac{\pi}{2})\right) = m\left(\frac{v_A^2}{R} + g\right) \tag{17}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} N_A &= 200\,\mathrm{kg}\left(\frac{\left(\frac{20\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{5\,\mathrm{m}} + 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 200\,\mathrm{kg}\left(80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 17962\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{18}$$

**Osservazione:**
Si noti che la reazione vincolare in A *non è* uguale ed opposta alla forza peso $mg$. Infatti, anche

se prima di arrivare ad A il corpo $m$ mantiene velocità costante (dunque accelerazione nulla), quando si trova in A la sua accelerazione *non è nulla*, dato che inizia a curvare (se non avesse accelerazione la sua velocità non potrebbe cambiare di direzione). L'accelerazione in A è infatti l'accelerazione centripeta $-mv_A^2/R$, dunque la risultante delle forze *non è* nulla (=la reazione vincolare non cancella esattamente la forza peso).

- **in B**

$$\begin{cases} \theta_B = 0 \\ v_B = 17.38\,\mathrm{m/s} \end{cases}$$

e dunque

$$N_B = N(\theta_B) = m\left(\frac{v_B^2}{R} - g\sin(0)\right) \tag{19}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} N_B &= 200\,\mathrm{kg}\left(\frac{\left(\frac{17.38\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{5\,\mathrm{m}} - 0\right) = \\ &= 200\,\mathrm{kg}\left(60.41\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 12083\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{20}$$

- **in C**

$$\begin{cases} \theta_C = \pi/2 \\ v_C = 14.28\,\mathrm{m/s} \end{cases}$$

e dunque

$$N_C = N(\theta_C) = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\sin(\frac{\pi}{2})\right) = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\right) \tag{21}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} N_C &= 200\,\mathrm{kg}\left(\frac{\left(14.28\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{5\,\mathrm{m}} - 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 200\,\mathrm{kg}\left(30.97\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 6195\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{22}$$

**Osservazione:**
Confrontando i risultati (18), (20) e (22) osserviamo che, man mano che il corpo sale lungo la guida $A \to B \to C$, la reazione vincolare diminuisce in modulo.

3. Calcoliamo ora la velocità minima che il corpo deve avere in A per poter raggiungere il punto C.

   - Se ci basassimo *unicamente* sulla conservazione dell'energia, dedurremmo che la velocità $v_{A,min}$ che il corpo deve avere per raggiungere C corrisponde alla condizione per cui il corpo raggiunge C *con velocità nulla* ($v_C = 0$). Allora applicheremmo la conservazione dell'energia

$$\begin{aligned} E_m^A &= E_m^C \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}mv_{A,min}^2 + 0 &= 0 + mg2R \end{aligned} \tag{23}$$

     e otterremmo

$$v_{A,min} = \sqrt{4gR} \tag{24}$$

     Questo risultato sarebbe tuttavia sbagliato!

   - Per comprenderne il motivo, osserviamo che la reazione vincolare $\vec{N}$ della guida, non facendo lavoro, non è mai entrata nell'utilizzare la conservazione dell'energia. Tuttavia la reazione vincolare è presente, ed è determinante al fatto che il moto del corpo sia circolare.
     Infatti, se ora calcolassimo la reazione vincolare in C sostituendo nell'espressione (21) la velocità $v_C = 0$ (seguendo il ragionamento che si basa *puramente* la conservazione dell'energia), otterremo

$$N_C = m\left(\underbrace{\frac{v_C^2}{R}}_{=0} - g\right) = -mg < 0 \tag{25}$$

     che corrisponde ad una reazione vincolare $\vec{N} = -N\vec{u}_r$ diretta *esternamente* verso l'alto. Questo non è fisicamente possibile per questa guida !
     Per questo tipo di guida, infatti, la reazione vincolare è *necessariamente* diretta verso l'interno del cerchio. Infatti la guida impedisce al punto materiale di muoversi verso l'esterno del cerchio, ma non verso l'interno. Pertanto, ricordando che $\vec{N} = -N\,\vec{u}_r$, deve valere

$$N(\theta) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \text{il corpo non può muoversi verso l'esterno} \tag{26}$$

   - Questo significa che, anche se il corpo teoricamente possiede un'energia meccanica sufficiente a raggiungere C, se la reazione vincolare $N$ della guida si annulla *prima* che il corpo raggiunga $C$, di fatto la guida in quell'istante 'sparisce', perché non rappresenta più un vincolo. Il punto materiale si stacca dalla guida e cade sotto l'azione della forza peso. Quindi il risultato (24) è necessariamente sbagliato.

   - L'Eq.(16) è stata ricavata supponendo che il punto materiale si muova lungo la guida (infatti abbiamo usato l'espressione dell'accelerazione centripeta valida per un moto circolare). Dall'Eq.(16) ricaviamo che lungo *questa* guida deve valere ad ogni istante

$$N(\theta) = m\left(\frac{v^2}{R} - g\sin\theta\right) \geq 0 \tag{27}$$

Pertanto la condizione corretta per determinare la velocità minima $v_{A,min}$ è imporre che la reazione vincolare della guida si annulli esattamente in C (identificato da $\theta_C = \pi/2$), non prima. E dunque

$$\begin{aligned} N(\theta_C) &= 0 \\ &\Downarrow \\ \frac{v_C^2}{R} - g &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

ossia

$$v_C^2 = gR \tag{29}$$

D'altra parte dalla conservazione dell'energia meccanica (che rimane valida!)

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + 2mgR \tag{30}$$

ricaviamo

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mgR + 2mgR = \frac{5}{2}mgR \tag{31}$$

e dunque

$$v_A = \sqrt{5gR} \tag{32}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} v_{A,\mathrm{min}} &= \sqrt{5gR} = \\ &= \sqrt{5 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m}} = \qquad (33) \\ &= 15.7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (34) \end{aligned}$$

**COMMENTO 1**

Si noti la differenza rispetto al caso in cui il punto materiale è sempre vincolato a muoversi su una guida, come mostrato in figura qui sotto. Se la guida fosse un vero e proprio binario (cioè che impedisce al punto di muoversi sia verso l'esterno del cerchio che di cadere verso l'interno), il valore $N$ della reazione vincolare $\vec{N} = -N\vec{u}_r$ potrebbe essere sia positivo (se $\vec{N}$ è diretta verso il centro) che negativo (se $\vec{N}$ è diretta verso l'esterno). Ad esempio ponendo il punto materiale in $C$, anche con velocità nulla, la reazione vincolare sarebbe diretta verso l'alto e $N$ sarebbe negativo.

In tal caso il vincolo $N \geq 0$ non sussiste, e la velocità minima affinché il punto giunga in $C$ si ricaverebbe semplicemente dalla conservazione dell'energia meccanica imponendo che il punto giunga in $C$ con velocità nulla

$$\frac{1}{2}mv_{A,\mathrm{min}}^2 = mg2R \qquad \Rightarrow v_{A,\mathrm{min}} = \sqrt{4gR} \tag{35}$$

Nel caso del problema, invece, in cui il punto non è vincolato a muoversi necessariamente lungo la guida, non basta che il punto materiale abbia l'energia cinetica sufficiente a trasformarsi nell'energia potenziale relativa al punto $C$, ma occorre anche che abbia una velocità sufficiente a farlo rimanere incollato alla guida. Data la presenza della componente normale forza peso [vedi eq.(16)] la velocità minima è stabilita dalla condizione che la reazione vincolare sia non negativa

$$v_{A,\mathrm{min}} = \sqrt{5gR} \tag{36}$$

ed è piú elevata del risultato (35).

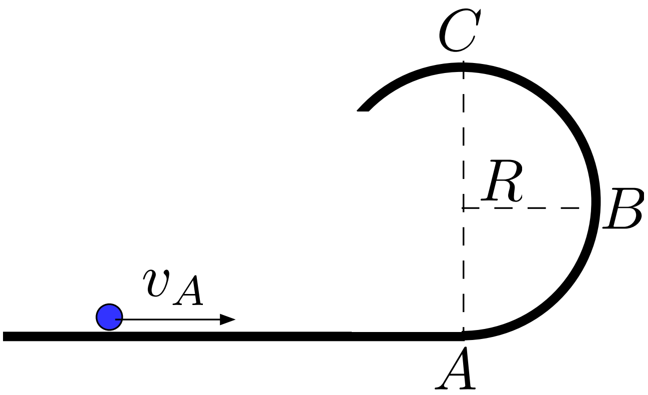



Figure 1: Il caso in cui la particella è vincolata a muoversi necessariamente lungo il binario circolare