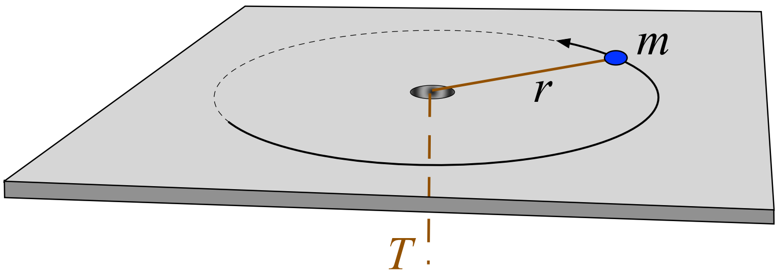
Esercizio (tratto dal problema 2.44 del Mazzoldi)

Un punto materiale di massa m descrive, con velocità di modulo v_1 costante, una circonferenza di raggio r_1 e centro O, sopra un piano orizzontale liscio. Esso è tenuto sulla traiettoria dall'azione di un filo che è mantenuto teso come mostrato in figura. Variando la tensione T, si porta il punto a descrivere una circonferenza di raggio r_2. Determinare, in termini di v_1 e r_1:

1. la velocità v_2;
2. l'espressione della tensione per un generico raggio r compreso tra r_1 e r_2;
3. il lavoro della tensione tra r_1 e r_2



SOLUZIONE
Osserviamo che la forza esercitata dalla tensione $\vec{T}$ sul corpo è una forza *centrale*, ossia sempre diretta verso il centro della circonferenza

$$\vec{T} = -T(r)\,\hat{u}_r \tag{1}$$

dove $\hat{u}_r$ è il versore radiale con verso uscente dal centro O.

Pertanto il momento della tensione (calcolato rispetto al polo O) è nullo

$$\begin{aligned} \vec{M}_T &= \vec{r} \times \vec{T} = \\ &= (r\,\hat{u}_r) \times (-T\,\hat{u}_r) = \\ &= -r\,T(r)\,\underbrace{\hat{u}_r \times \hat{u}_r}_{=0} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Dalla legge che governa il momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}_T = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L} \equiv \text{costante} \tag{3}$$

Siccome il moto avviene sul piano ($\rightarrow \vec{r}, \vec{p}$ giacciono sul piano), il momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \text{è ortogonale al piano} \tag{4}$$

e ha dunque componente solo lungo z

$$\vec{L} = (0, 0, L_z) = \text{costante} \tag{5}$$

Inoltre, dato che la traiettoria è una circonferenza, istante per istante la quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$ è (nel piano) ortogonale alla posizione $\vec{r}$. Pertanto dal prodotto vettoriale (4) che definisce il momento angolare otteniamo

$$L_z = m\,r\,v(r) \equiv \text{costante} \tag{6}$$

Possiamo ora procedere a calcolare le varie quantià richieste.

1. Applicando la conservazione del momento angolare (6) abbiamo

   $$m\,r_1 v_1 \quad = \quad m r_2\, v_2 \tag{7}$$

   da cui si ricava

   $$v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2} \tag{8}$$

   In generale, per un generico raggio r, abbiamo

   $$m\,r_1 v_1 \quad = \quad m r\, v(r) \tag{9}$$

   e dunque

   $$v(r) = v_1 \frac{r_1}{r} \tag{10}$$

2. Dalla seconda legge della dinamica abbiamo che la componente centripeta dell'accelerazione vale

$$
\begin{aligned}
\vec{T}(r) &= m\vec{a}_r \\
&\Downarrow \\
-T(r)\,\hat{u}_r &= -m\frac{v^2(r)}{r}\hat{u}_r \\
&\Downarrow \\
T(r) &= m\frac{v^2(r)}{r} \\
&\Downarrow \quad \text{[uso la (10)]} \\
T(r) &= m\frac{v_1^2\,r_1^2}{r^3} \quad \left(= \frac{L_z^2}{mr^3}\right) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

3. Posso ora calcolare il lavoro della tensione dal raggio r_1 al raggio r_2 come

$$
\begin{aligned}
W(r_1 \to r_2) &= \int_{r_1}^{r_2} \vec{T}\cdot d\vec{r} = \\
&= \int_{r_1}^{r_2} (-T(r)\hat{u}_r)\cdot \hat{u}_r dr = \\
&= -\int_{r_1}^{r_2} T(r)\,\underbrace{\hat{u}_r\cdot\hat{u}_r}_{=1}\,dr = \\
&\quad \text{[uso la (12)]} \\
&= -\int_{r_1}^{r_2} m\frac{v_1^2\,r_1^2}{r^3}\,dr = \\
&= -mv_1^2\,r_1^2\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^3}\,dr = \\
&= -mv_1^2\,r_1^2\left[-\frac{1}{2r^2}\right]_{r=r_1}^{r=r_2} = \\
&= \frac{mv_1^2\,r_1^2}{2}\left(\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_1^2}\right) \qquad \left(= \frac{L_z^2}{2m}\left(\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)\right) \qquad (12)
\end{aligned}
$$