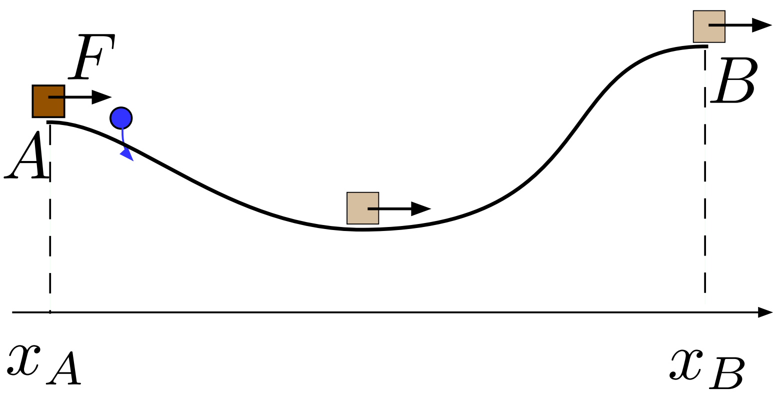
Esercizio (tratto dal problema 2.10 del Mazzoldi)

Un punto materiale di massa $m = 5\,\text{kg}$ si muove lungo la guida liscia indicata in figura. Nella posizione A, di ascissa $x_A = 0$, l'altezza rispetto al suolo è $y_A = 0.5\,\text{m}$, mentre nella posizione B, di ascissa $x_B = 2\,\text{m}$, l'altezza è $y_B = 0.8\,\text{m}$. Al corpo è applicata la forza esterna costante orizzontale $F = 20\,\text{N}$.

1. Calcolare il lavoro delle forze agenti sul corpo nello spostamento da A a B;
2. se la velocità iniziale è nulla, quanto vale la velocità finale?



SOLUZIONE

DATI NOTI:

$$\begin{aligned} m &= 5\,\mathrm{kg} \\ A &= (0, 0.5)\,\mathrm{m} \\ B &= (2, 0.8)\,\mathrm{m} \\ F &= 20\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Sul corpo m agiscono 3 forze:

-forza esterna $\vec{F}$;
-forza peso $m\vec{g}$;
-reazione vincolare della guida $\vec{R}$.

Calcoliamo il lavoro di ciascuna di esse:

1. **Lavoro della forza esterna $\vec{F}$**
   Calcoliamo il lavoro della forza $\vec{F} = (F, 0)$ applicata al corpo

$$\begin{aligned} W_F^{A\to B} &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \\ &= \int_A^B (F_x dx + F_y dy) = \\ & \quad [\text{uso } \vec{F} = (F_x, F_y) = (F, 0)] \\ &= \int_{x_A}^{x_B} F dx = \\ &= F\int_{x_A}^{x_B} dx = \\ &= F(x_B - x_A) \end{aligned} \tag{1}$$

   Sostituendo i valori otteniamo

$$W_F^{A\to B} = 20\,\mathrm{N}\cdot(2-0)\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{J} \tag{2}$$

2. **Lavoro della forza peso**
   Possiamo procedere in due modi:

   (a) **Primo modo:** Uso direttamente la definizione di lavoro

$$\begin{aligned} W_{\text{peso}}^{A\to B} &= \int_A^B m\vec{g}\cdot d\vec{r} = \qquad [\text{uso } m\vec{g} = (0, -mg)] \\ &= \int_A^B (0, -mg)\cdot(dx, dy) = \\ &= \int_A^B (0\,dx - mg\,dy) = \\ &= -mg\int_{y_A}^{y_B} dy = \\ &= -mg(y_B - y_A) = \\ &= mg(y_A - y_B) \end{aligned} \tag{3}$$

(b) **Secondo modo:** Sfrutto il fatto che la forza peso è conservativa. Per una forza conservativa il lavoro si può esprimere come

$$\begin{aligned} W_{peso}^{A\to B} &= -\Delta E_p^{A\to B} = -(E_p^B - E_p^A) = \\ &= E_p^A - E_p^B = \\ &= mg\,(y_A - y_B) \end{aligned} \tag{4}$$

che coincide col risultato trovato nel primo modo.

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} W_{peso}^{A\to B} &= 5\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(0.5-0.8)\,\mathrm{m} = \\ &= -14.7\,\mathrm{kg\,m^2/s^2} = \\ &= -14.7\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{5}$$

3. **Lavoro della reazione vincolare**
Osserviamo che la reazione vincolare è sempre diretta ortogonalmente alla dirzione della guida, e dunque è perpendicolare allo spostamento, istante per istante. Pertanto si ha

$$W_R^{A\to B} = \int_A^B \underbrace{\vec{R}\cdot d\vec{r}}_{=0} = 0 \tag{6}$$

La reazione vincolare non compie lavoro.

4. Sfruttiamo ora il teorema dell'energia cinetica: la variazione di energia cinetica è data dal lavoro di *tutte* le forze applicate al punto materiale (sia la forza esterna $\vec{F}$ che la forza peso $m\vec{g}$)

$$\begin{aligned} \Delta E_k^{A\to B} &= W_F^{A\to B} + W_{A\to B}^{peso} + W_{A\to B}^R \\ &\Downarrow \\ E_k^B - \underbrace{E_k^A}_{=0} &= W_F^{A\to B} + W_{A\to B}^{peso} + \underbrace{W_{A\to B}^R}_{=0} \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}mv_B^2 &= W_F^{A\to B} + W_{A\to B}^{peso} \end{aligned} \tag{7}$$

dove lavoro $W_F^{A\to B}$ è dato dalla (2) e il lavoro $W_{A\to B}^{peso}$ della forza peso è dato dalla (5) .

5. Dalla (7) ricaviamo che la velocità nel punto B è data da

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{m}\left(W_F^{A\to B} + W_{peso}^{A\to B}\right)} \tag{8}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\frac{2}{5\,\mathrm{kg}}\,(40\,\mathrm{J} - 14.7\,\mathrm{J})} = \\ &\quad [\text{sfrutto } \mathrm{J} = \mathrm{kg}\tfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}] \\ &= \sqrt{10.12\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 3.18\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{9}$$