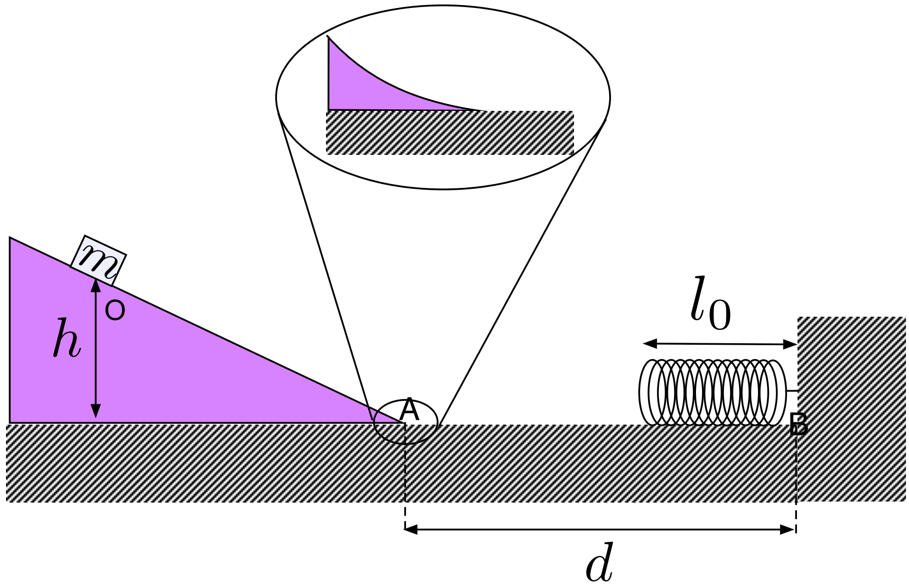
Esercizio (tratto dal Problema 4.28 del Mazzoldi 2)

Un punto materiale di massa $m = 20\,\mathrm{gr}$ scende lungo un piano inclinato liscio. Alla fine del piano inclinato scorre su un tratto orizzontale scabro ($\mu_D = 0.1$), andando ad urtare una molla fissata ad un vincolo verticale, come mostrato in figura. La molla ha una lunghezza a riposo $l_0 = 10\,\mathrm{cm}$ ed una costante elastica $k = 2\,\mathrm{N/m}$. La distanza tra la fine del piano inclinato ed il vincolo è $d = 40\,\mathrm{cm}$. Supponendo che all'istante iniziale il punto materiale sia fermo, determinare l'altezza minima h da cui deve scendere affinché, dopo aver urtato la molla, possa comprimerla totalmente e toccare la parete del vincolo.



SOLUZIONE

Dati noti
Anzitutto convertiamo tutti i dati in unità di misura del Sistema Internazionale

$$\begin{aligned} m &= 0.02\,\mathrm{kg} \\ l_0 &= 0.1\,\mathrm{m} \\ d &= 0.4\,\mathrm{m} \\ k &= 2\,\mathrm{N/m} \\ \mu_D &= 0.1 \end{aligned}$$

Suddividiamo il moto del punto materiale in due tratti

1. da un'altezza iniziale h generica (punto O) al fondo del piano inclinato (punto A);
2. dal fondo del piano inclinato (punto A) fino al vincolo verticale (punto B)

e sfruttiamo il bilancio energetico in ciascun tratto.

1. **tratto O→A**
   Nel primo tratto di moto agiscono sul punto materiale le seguenti forze:

   - forza peso (conservativa)
   - reazione vincolare $\vec{R}$ del piano (non fa lavoro, non entra nel bilancio energetico)

   Non agiscono forze non conservative di attrito (non conservative), dato che il piano è liscio.

   Dal teorema dell'energia cinetica:

$$\begin{aligned} \Delta E_K &= \underbrace{W_{peso}}_{\substack{= -\Delta E_{p,peso} \\ \text{perchè forza peso} \\ \text{è conservativa}}} + \underbrace{W_R}_{\substack{=0 \\ \text{perchè } \vec{R} \text{ è} \\ \text{ortog. al moto}}} \\ &\Downarrow \\ \Delta(E_K + E_{p,peso}) &= 0 \\ &\Downarrow \\ \Delta E_m &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

   L'energia meccanica si conserva perchè l'unica forza che compie lavoro è conservativa, ed è la forza peso. Applicando quindi la conservazione dell'energia meccanica

$$E_m^O = E_m^A \qquad (2)$$

   - All'istante iniziale il corpo parte da O da fermo ($v = 0$), pertanto l'energia cinetica iniziale è nulla. Tuttavia, partendo da un'altezza h, il corpo possiede un'energia potenziale gravitazionale

$$E_m^O = \underbrace{\frac{1}{2} m v_O^2}_{=0} + \underbrace{m g z_O}_{=mgh} = mgh \qquad (3)$$

- Al punto A in fondo al piano ($z = 0$) il corpo arriva con una certa velocità, che denotiamo con v_A. In questo caso, dunque, l'energia è in forma puramente cinetica

$$E_m^A = \frac{1}{2}mv_A^2 + \underbrace{mgz_O}_{=0} = \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{4}$$

Inserendo (3) e (4) in (2) otteniamo

$$mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{5}$$

da cui ricaviamo che

$$v_A = \sqrt{2gh} \tag{6}$$

Controllo dimensionale: Verifico che il risultato ottenuto qui sopra abbia effettivamente le dimensioni di una velocità

$$[\sqrt{2gh}] = \sqrt{[g][h]} = \sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \mathrm{OK} \tag{7}$$

Si noti che al fondo del piano inclinato il raccordo col piano orizzontale è smussato. Pertanto il valore di v_A determinato in (6) è anche il modulo della velocità con cui il corpo parte orizzontalmente lungo il piano orizzontale scabro.

2. **tratto A→B**
Nel secondo tratto di moto agiscono sul corpo due forze

   - forza peso (non fa lavoro, non entra nel bilancio energetico)
   - reazione vincolare $\vec{R}$ del piano (non fa lavoro, non entra nel bilancio energetico)
   - forza di attrito dinamico (non conservativa);
   - forza elastica della molla (conservativa)

Siccome sono presenti forze *non* conservative, *non* possiamo applicare il teorema di *conservazione* dell'energia meccanica, ed in questo tratto di moto si avrà

$$\Delta E_m \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{(l'energia meccanica non si conserva)} \tag{8}$$

Possiamo però applicare il teorema dell'energia cinetica, oppure equivalentemente anche il teorema di *variazione* dell'energia meccanica. Quest'ultimo stabilisce che

$$\Delta E_m^{A\to B} = E_m^B - E_m^A = W_{nc}^{A\to B} \tag{9}$$

dove $\Delta E_m^{A\to B}$ è la variazione di energia meccanica del corpo tra due istanti t_{in} e t_{fin}, e W_{nc} è il lavoro compiuto dalle sole forze non-conservative sul corpo tra tali due istanti.

Questo secondo tratto di moto avviene orizzontalmente ($z \equiv 0$), e dunque il corpo non ha alcuna energia potenziale gravitazionale. Tuttavia, siccome (almeno in una parte del moto) tocca e comprime la molla, il corpo possiede in generale anche un'energia potentiale elastica. L'energia meccanica in *questo* tratto del moto consta dunque di

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2}k(\Delta l)^2}_{\text{en. potenz. elastica}} \tag{10}$$

dove Δl descrive lo scostamento della molla rispetto alla sua lunghezza a riposo (**NOTA BENE: non la distanza dalla parete !**)

Il teorema (9) della variazione dell'energia meccanica si scrive pertanto

$$\left(\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l_B)^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l_A)^2\right) = W_{nc} \tag{11}$$

Scegliamo pertanto:

- come istante iniziale l'istante in cui il corpo parte dal fondo del piano inclinato A;
- come istante finale l'istante in cui il corpo, comprimendo totalmente la molla, tocca la parete (punto B).

e procediamo col calcolare i vari contributi che compaiono nell'equazione (11):

- All'istante iniziale in A l'energia cinetica è data dalla velocità v determinata in (6). Il corpo non ha ancora toccato la molla, quest'ultima si trova alla sua lunghezza di riposo

$$E_m^A = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}k\underbrace{(\Delta l_A)^2}_{=0} = \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{12}$$

- Siccome il problema chiede di determinare l'altezza h *minima*, questo significa determinare l'altezza per la quale il corpo tocca la parete B con velocità nulla (se partisse da un'altezza più elevata, toccherebbe la parete con una velocità finita). Inoltre, dato che in B la molla è *totalmente* compressa, avremo $\Delta l_B = -l_0$. Pertanto

$$E_m^B = \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2}_{=0} + \frac{1}{2}k\underbrace{(\Delta l_B)^2}_{=(-l_0)^2} = \frac{1}{2}k\, l_0^2 \tag{13}$$

- Calcoliamo ora il lavoro fatto dalla forza non conservativa di attrito dinamico da A a B

$$\begin{aligned} W_{nc} &= \int_A^B \vec{F}_{\text{att}} \cdot d\vec{r} = \\ & \quad [\vec{F}_{\text{att}} \text{ è costante } \text{ posso portarla fuori dall'integrale}] \\ &= \vec{F}_{\text{att}} \cdot \underbrace{\int_A^B d\vec{r}}_{\Delta\vec{r}_{A\to B}} = \vec{F}_{\text{att}} \cdot \Delta\vec{r}_{A\to B} = \\ & \quad [\vec{F}_{\text{att}} \text{ è opposta allo spostamento } \Delta\vec{r}_{A\to B} \\ & \quad \to \ \vec{F}_{\text{att}} \cdot \Delta\vec{r}_{A\to B} = -\mu_D mg \underbrace{|\Delta\vec{r}_{A\to B}|}_{=d}\,] \\ &= -\mu_D mgd \end{aligned} \tag{14}$$

Sostituendo ora le equazioni (12)-(13) e (14) in (11) abbiamo

$$\frac{1}{2}kl_0^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -\mu_D mgd \tag{15}$$

Ricordando ora che $v_A = \sqrt{2gh}$ [vedi Eq.(6)], abbiamo

$$\frac{1}{2}kl_0^2 - mgh = -\mu_D mgd \tag{16}$$

da cui ricaviamo che l'altezza minima vale

$$h = \mu_D d + \frac{k}{2mg} l_0^2 \tag{17}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}
h &= 0.1 \cdot 0.4\,\mathrm{m} + \frac{2\mathrm{N}}{\cancel{\mathrm{m}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot 9.81 \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2}} \cdot \frac{(0.1\,\cancel{\mathrm{m}})^2}{0.02\,\mathrm{kg}} = \\
&= 0.04\,\mathrm{m} + 0.051 \frac{\mathrm{N\,s}^2}{\mathrm{kg}} = \\
&\quad [\text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s}^2\ ] \\
&= 0.04\,\mathrm{m} + 0.051\,\mathrm{m} = \\
&= 0.09\,\mathrm{m}
\end{aligned} \tag{18}$$