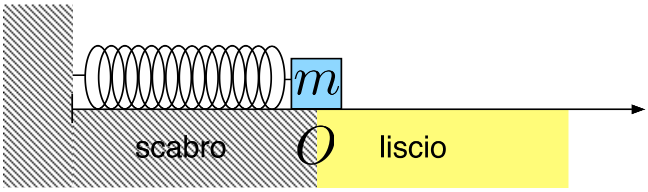
Esercizio (tratto dal Problema 4.29 del Mazzoldi 2)

Un corpo di massa $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ è agganciato ad un supporto fisso tramite una molla di costante elastica $k = 2\,\mathrm{N/m}$; il corpo è in quiete nel punto O di un piano orizzontale, che è liscio a destra di O e scabro a sinistra di O. Viene impressa al corpo una velocità $v_0 = 0.16\,\mathrm{m/s}$ verso destra. Calcolare:

1. di quanto è allungata la molla nell'istante in cui il corpo si ferma.

Il corpo ripassa per O con velocità $-v_0$ e si ferma dopo aver percorso una distanza di $5\,\mathrm{cm}$ alla sinistra di O. Calcolare

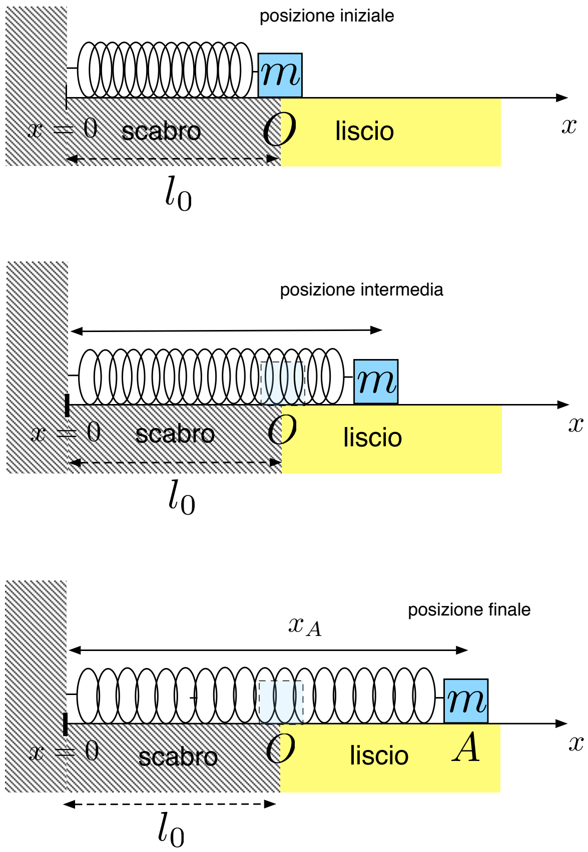
2. il valore del coefficiente di attrito dinamico μ.



SOLUZIONE

DATI INIZIALI
$m = 0.5\,\mathrm{kg}$
$k = 2\,\mathrm{N/m}$
$v_0 = 0.16\,\mathrm{m/s}$
$\Delta l' = -0.05\,\mathrm{m}$

1. La prima parte del moto si svolge dal punto O al punto A, in cui il corpo si arresta alla destra di O.



In questa fase il corpo è soggetto alla sola forza elastica della molla. Indicando con x la coordinata lungo il piano e prendendo la parete come origine $x = 0$ dell'asse, abbiamo

$$F(x) = -k(x - l_0) \tag{1}$$

dove l_0 è la lunghezza a riposo della molla. Possiamo risolvere il problema in due modi

Primo modo (Bilancio energetico)
Dato che la forza della molla è conservativa, possiamo applicare il teorema di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_m^O = E_m^A \tag{2}$$

dove l'energia meccanica è data da

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2}k(\Delta l)^2}_{\text{en. potenz. elastica}} \qquad \Delta l = x - l_0 \tag{3}$$

Inizialmente la molla è a riposo (il punto materiale si trova in $l = l_0$) e quindi

$$E_m^O = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{4}$$

mentre quando il punto materiale si arresta in A si ha

$$E_m^A = \frac{1}{2}k(\Delta l_{max})^2 \tag{5}$$

Inserendo le Eq.(4) e (5) in (2) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}k(\Delta l_{max})^2 \\ &\Rightarrow \quad \Delta l_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 \end{aligned} \tag{6}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta l_{max} &= \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 = \\ &= \sqrt{\frac{0.5\,\mathrm{kg}}{2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}}\, 0.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &\quad \text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2} \\ &= \sqrt{\frac{0.25\,\mathrm{kg}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}}}\, 0.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= \sqrt{0.25\,\mathrm{s}^2}\, 0.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= 0.08\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{7}$$

Secondo modo (Equazioni della dinamica):
Nel tratto da O ad A l'unica forza che agisce sul punto materiale è la forza elastica della molla. Denotiamo con l la coordinata del punto materiale (l'origine $l = 0$ è situata nel punto in cui la molla è agganciata al supporto). Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} ma &= F \\ &\Downarrow \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k(x - l_0) \\ &\Downarrow \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}(x - l_0) \end{aligned} \tag{8}$$

Questa è l'equazione differenziale che dobbiamo risolvere, con le condizioni iniziali (relative all'istante in cui il punto materiale parte da O verso destra)

$$\begin{cases} x(t=0) = l_0 \\ \\ \dfrac{dx}{dt}(t=0) = v_0 \end{cases} \tag{9}$$

Per risolvere l'Eq.(8) osserviamo che, definendo

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{10}$$

l'Eq.(8) si scrive

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x - l_0) \tag{11}$$

che è simile all'equazione di un moto armonico

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \tag{12}$$

di cui sono note le soluzioni. Basta ora osservare che, essendo l_0 è costante, possiamo scrivere

$$\frac{d^2(x - l_0)}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x - l_0) \tag{13}$$

Introducendo la variabile

$$\xi(t) = x(t) - l_0 \tag{14}$$

che descrive lo scostamento al tempo t dalla posizione di equilibrio, l'Eq.(11) diventa

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega^2\xi(t) \tag{15}$$

che è l'equazione del moto armonico, la cui soluzione generale è nota e si può scrivere

$$\xi(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \tag{16}$$

Ricordando la relazione (14) otteniamo la soluzione generale dell'Eq.(8)

$$x(t) = l_0 + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{17}$$

e la cui velocità è

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -C\omega\sin(\omega t) + D\omega\cos(\omega t) \tag{18}$$

Le costanti C e D si determinano imponendo le condizioni iniziali (9)

$$\begin{cases} x(t=0) = l_0 + C\cos(\omega\, 0) + D\sin(\omega\, 0) = l_0 \\ v(t=0) = -C\omega\sin(\omega\, 0) + D\omega)\cos(\omega\, 0 = v_0 \end{cases} \tag{19}$$

ossia

$$\begin{cases} C = 0 \\ D\omega = v_0 \qquad \Rightarrow D = \frac{v_0}{\omega} \end{cases} \tag{20}$$

Sostituendo i valori di C e D nella soluzione generale (17) otteniamo

$$\boxed{x(t) = l_0 + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{21}$$

e la velocità è

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t) \tag{22}$$

Denotiamo ora con t_A l'istante in cui il punto materiale raggiunge il punto A di massimo allungamento della molla. Tale punto è caratterizzato dall'annullarsi della velocità

$$v(t_A) = v_0 \cos(\omega t_A) = 0 \qquad \Rightarrow \omega t_A = \frac{\pi}{2} \tag{23}$$

La coordinata del punto A è dunque

$$\begin{aligned} x_A = x(t_A) &= l_0 + \frac{v_0}{\omega} \underbrace{\sin(\omega t_A)}_{=+1} = \\ &= l_0 + \frac{v_0}{\omega} \end{aligned} \tag{24}$$

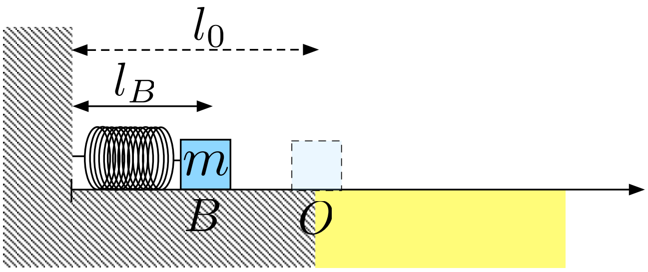
Ricordando la definizione (10) otteniamo che l'allungamento

$$\begin{aligned} \Delta l_{max} = x_A - l_0 &= \frac{v_0}{\omega} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 \end{aligned} \tag{25}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta l_{max} &= \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 = \\ &= \sqrt{\frac{0.5\,\mathrm{kg}}{2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}}\, 0.16 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &\quad \text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2} \\ &= \sqrt{\frac{0.25\,\mathrm{kg}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}}}\, 0.16 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= \sqrt{0.25\,\mathrm{s}^2}\, 0.16 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= 0.08\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{26}$$

2. Il secondo tratto del moto va da quando il corpo ripassa per O con velocità $-v_0$ a quando si arresta dalla parte scabra del piano (a sinistra di O) in un punto che indichiamo con B. Anche



qui possiamo procedere in due modi:

Primo modo (Bilancio energetico):

In questo tratto le forze che agiscono sul punto materiale sono la forza elastica della molla e l'attrito dinamico del piano scabro. Dato che quest'ultima forza non è conservativa, l'energia meccanica non si conserva. Possiamo tuttavia applicare il teorema dell'energia meccanica (NB: non il teorema di *conservazione* dell'energia meccanica!)

$$\Delta E_m = W_{\rm nc} \tag{27}$$

dove ΔE_m è la variazione dell'energia meccanica e $W_{\rm nc}$ è il lavoro delle forze non conservative (in questo caso l'attrito dinamico). Nel tratto da O a B abbiamo dunque

$$\Delta E_m^{O\to B} = \int_O^B \vec{F}_{att} \cdot d\vec{l} \tag{28}$$

La variazione di energia meccanica vale

$$\begin{aligned}\Delta E_m^{O\to B} &= E_m^B - E_m^O = \\ &= \left(0 + \frac{1}{2}k(\Delta l')^2\right) - \left(\frac{1}{2}m(-v_0)^2 + 0\right) = \\ &= \frac{1}{2}k(\Delta l')^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\end{aligned} \tag{29}$$

dove $\Delta l' = l_B - l_0$ e l_B è la coordinata del punto B.

Siccome la forza di attrito si oppone sempre al moto ed è costante in modulo abbiamo

$$W_{\rm nc} = -|\vec{F}_{att}|\underbrace{|\Delta\vec{r}_{O\to B}|}_{=\Delta l'} = -\mu\, mg|\Delta l'| \tag{30}$$

Si noti che il lavoro è *negativo*, e quindi l'energia meccanica diminuisce passando da O a B [vedi Eq.(28)], come è intuitivo aspettarsi in presenza di forze dissipative quali l'attrito.

Inserendo le Eq.(29) e (30) in (27) otteniamo

$$\frac{1}{2}k(\Delta l')^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad = \quad -\mu\, mg|\Delta l'| \tag{31}$$

da cui il coefficiente di attrito vale

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l')^2}{mg|\Delta l'|} \tag{32}$$

Inserendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\frac{1}{2}0.5\,\mathrm{kg}\left(0.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \frac{1}{2}\ 2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}(-0.05\mathrm{m})^2}{0.5\,\mathrm{kg}\,9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0.05\,\mathrm{m}} = \\ &\quad [\text{uso N} = \mathrm{kg\,m/s^2}] \\ &= \frac{0.25\ \cdot 0.0256\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}} - \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s^2}}\cdot 0.0025\mathrm{m}^2}{0.24525\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}} = \\ &= 0.016 \end{aligned} \tag{33}$$

Secondo modo (Equazioni della dinamica):

- Nel tratto da O a B la forza di attrito è diretta verso destra, dato che si oppone al moto verso sinistra. Denotiamo con l la coordinata del punto materiale (l'origine $l = 0$ è situata nel punto in cui la molla è agganciata al supporto). Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} ma &= F \\ &\Downarrow \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k(x-l_0) + \mu mg \\ &\Downarrow \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}(x-l_0) + \mu g \end{aligned} \tag{34}$$

Questa è l'equazione differenziale che dobbiamo risolvere, con le condizioni iniziali (relative all'istante in cui il punto materiale parte da O verso sinistra)

$$\begin{cases} x(t=0) = l_0 \\ \\ \frac{dx}{dt}(t=0) = -v_0 \end{cases} \tag{35}$$

Per risolvere l'Eq.(34) osserviamo che possiamo riscriverla in questo modo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(x - (l_0 + \frac{\mu mg}{k})\right) \tag{36}$$

Definendo ora

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{37}$$

e

$$l_0' = l_0 + \frac{\mu mg}{k} \tag{38}$$

l'Eq.(36) diventa

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\left(x - l_0'\right) \tag{39}$$

Siccome il termine in l_0' è costante, possiamo anche riscrivere

$$\frac{d^2(x-l_0')}{dt^2} = -\omega^2\left(x - l_0'\right) \tag{40}$$

Pertanto, introducendo nuovamente la variabile scostamento

$$\xi(t) = x(t) - l'_0 \tag{41}$$

vediamo che l'Eq.(40) diventa

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega^2 \xi(t) \tag{42}$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico, le cui soluzioni sono note:

$$\xi(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \tag{43}$$

Dall'Eq.(41) otteniamo dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale (34)

$$x(t) = l'_0 + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \tag{44}$$

e ricordando l'espressione (38) per l'_0 otteniamo

$$x(t) = l_0 + \frac{\mu m g}{k} + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{45}$$

la cui velocità è

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -C\omega\sin(\omega t) + D\omega\cos(\omega t) \tag{46}$$

- Le costanti C e D sono da determinarsi imponendo le condizioni iniziali (35)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t=0) & = & l_0 + \frac{\mu m g}{k} + C\cos(\omega\, 0) + D\sin(\omega\, 0) = l_0 \\ \\ v(t=0) & = & -C\omega\sin(\omega\, 0) + D\omega\cos(\omega\, 0) = -v_0 \end{array} \right. \tag{47}$$

ossia

$$\left\{ \begin{array}{lcll} C & = & -\frac{\mu m g}{k} & \\ \\ D\omega & = & -v_0 & \Rightarrow D = -\frac{v_0}{\omega} \end{array} \right. \tag{48}$$

Sostituendo le costanti C e D nella soluzione generale (45) otteniamo

$$\boxed{x(t) = l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{\mu m g}{k}\cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{49}$$

La velocità è data dunque da

$$v(t) = \frac{\mu m g \omega}{k}\sin(\omega t) - v_0\cos(\omega t) \tag{50}$$

- In sostanza abbiamo allora dimostrato che

Forza elastica di una molla con lunghezza a riposo l_0	$+$	Forza costante	$\Leftrightarrow$	Forza elastica di una molla con lunghezza a riposo l'_0

- Denotiamo con t_B l'istante in cui il punto materiale raggiunge il punto B. Tale punto è caratterizzato dall'annullarsi della velocità

$$v(t_B) = \frac{\mu m g \omega}{k} \sin(\omega t_B) - v_0 \cos(\omega t_B) = 0 \tag{51}$$

e dunque

$$\tan(\omega t_B) = \frac{v_0 k}{\mu m g \omega} \tag{52}$$

Ricordando le formule di trigonometria

$$\begin{cases} \cos\alpha &= \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \\ \\ \sin\alpha &= \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \end{cases}$$

e utilizzando la (52) ricaviamo

$$\begin{cases} \cos(\omega t_B) &= \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2}} \\ \\ \sin(\omega t_B) &= \dfrac{\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2}} \end{cases} \tag{53}$$

da cui possiamo ricavare la posizione del punto B

$$\begin{aligned} l_B = l(t_B) &= l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{\mu m g}{k}\cos(\omega t_B) - \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t_B) = \\ &= l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{\mu m g}{k}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2}} - \frac{v_0}{\omega}\frac{\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2}} = \\ &= l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{\mu m g}{k}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2}}\left(1 + \frac{v_0^2 k^2}{(\mu m g \omega)^2}\right) = \\ &= l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{\mu m g}{k}\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2} = \\ &= l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{1}{k}\sqrt{(\mu m g)^2 + \left(\frac{v_0 k}{\omega}\right)^2} = \\ &\quad [\text{uso } \omega^2 = k/m] \\ &= l_0 + \frac{\mu m g - \sqrt{(\mu m g)^2 + k m v_0^2}}{k} \end{aligned}$$

da cui

$$\Delta l' \doteq l_B - l_0 = \frac{\mu m g - \sqrt{(\mu m g)^2 + k m v_0^2}}{k} \tag{54}$$

Dato che conosciamo $\Delta l'$ come dato dal problema, tale equazione ci permette di determinare μ. Esplicitamente, da (54) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\Delta l' - \frac{\mu m g}{k} &= -\frac{\sqrt{(\mu m g)^2 + k m v_0^2}}{k} \\
&\Downarrow \\
\left(\Delta l' - \frac{\mu m g}{k}\right)^2 &= \frac{(\mu m g)^2 + k m v_0^2}{k^2} \\
&\Downarrow \\
(\Delta l')^2 - 2\Delta l' \frac{\mu m g}{k} + \frac{(\mu m g)^2}{k^2} &= \frac{(\mu m g)^2 + k m v_0^2}{k^2} \\
&\Downarrow \\
(\Delta l')^2 - 2\Delta l' \frac{\mu m g}{k} &= \frac{m v_0^2}{k} \\
&\Downarrow \\
2\Delta l' \frac{\mu m g}{k} &= (\Delta l')^2 - \frac{m v_0^2}{k} \\
&\Downarrow \\
\mu &= \frac{k}{2\Delta l' m g}\left((\Delta l')^2 - \frac{m v_0^2}{k}\right) \qquad (55)
\end{aligned}
$$

ossia

$$
\mu = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta l')^2 - \frac{1}{2} m v_0^2}{m g \Delta l'} \qquad (56)
$$

Sostituendo i valori numerici (ricordiamo che $\Delta l' = -0.05\,\mathrm{m}$) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{\frac{1}{2}\ 2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}(-0.05\mathrm{m})^2 - \frac{1}{2}0.5\,\mathrm{kg}\left(0.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0.5\,\mathrm{kg}\ \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (-0.05\,\mathrm{m})} = \\
& [\text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}] \\
&= \frac{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0.0025\,\mathrm{m}^2 - 0.25\ \cdot 0.0256\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}^2}}{-0.24525\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}^2}} = \\
&= 0.016 \qquad (57)
\end{aligned}
$$