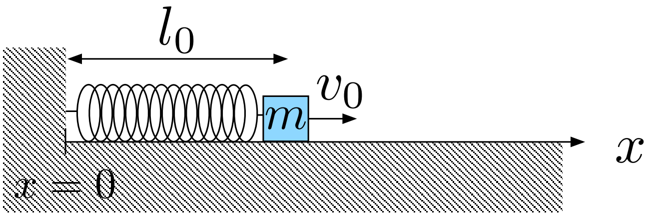
Esercizio (tratto dal Problema 4.29 del Mazzoldi 2)

Un corpo di massa $m = 1.5\,\mathrm{kg}$ è agganciato ad una molla di costante elastica $k = 2\,\mathrm{N/m}$, di lunghezza a riposo $l_0 = 50\,\mathrm{cm}$, fissata ad una parete verticale in $x = 0$. Il piano su cui si trova il corpo è liscio. All'istante $t = 0$ al corpo viene impressa una velocità iniziale $v_0 = 0.2\,\mathrm{m/s}$ verso destra.

1. scrivere la legge oraria $x(t)$ del corpo;
2. calcolare l'energia cinetica del corpo e tracciare il suo andamento nel tempo;
3. calcolare l'energia potenziale del corpo e tracciare il suo andamento nel tempo;
4. mostrare che l'energia meccanica si conserva;
5. utilizzando la conservazione dell'energia calcolare l'allungamento massimo $\Delta x_{max} > 0$ della molla verso destra.
6. utilizzando la conservazione dell'energia calcolare la velocità del corpo quando comprime la molla verso sinistra di una quantità $\Delta x_B = -\Delta_{max}/2$.



SOLUZIONE

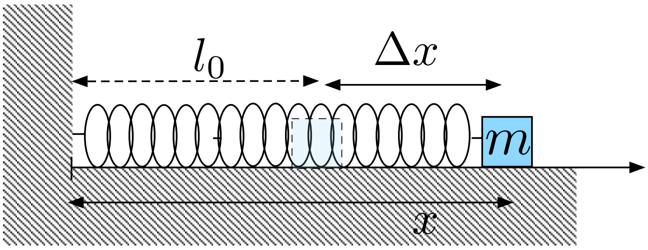
DATI NOTI

$m = 1.5\,\mathrm{kg}$
$k = 2\,\mathrm{N/m}$
$l_0 = 0.5\,\mathrm{m}$
$v_0 = 0.2\,\mathrm{m/s}$

- **posizione iniziale**
$$x(t = 0) = l_0 \tag{1}$$

- **velocità iniziale**
$$v(t = 0) = v_0 \tag{2}$$

1. La legge oraria si ricava risolvendo le equazioni della dinamica.



Il corpo è soggetto alla sola forza elastica della molla. Indicando con x la coordinata del corpo m lungo il piano (misurata rispetto all'origine posta alla parete verticale) abbiamo

$$F_{el}(x) = -k(x - l_0) \tag{3}$$

dove l_0 è la lunghezza a riposo della molla. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} ma &= F_{el} \\ &\Downarrow \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k(x - l_0) \\ &\Downarrow \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}(x - l_0) \end{aligned} \tag{4}$$

Questa è l'equazione differenziale che dobbiamo risolvere, con le condizioni iniziali (relative all'istante in cui il punto materiale parte da O verso destra)

$$\begin{cases} x(t = 0) = l_0 \\ \\ v(t = 0) = v_0 \end{cases} \tag{5}$$

Per risolvere l'Eq.(4) osserviamo che, siccome l_0 è costante, possiamo scrivere la (4) anche come

$$\frac{d^2(x - l_0)}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x - l_0) \tag{6}$$

Pertanto, definendo

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{7}$$

e introducendo la variabile scostamento

$$\Delta x(t) = x(t) - l_0 \qquad \leftrightarrow \qquad x(t) = l_0 + \Delta x(t) \tag{8}$$

(che rappresenta lo scostamento rispetto alla lunghezza a riposo della molla) otteniamo che Δx soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = -\omega^2 \, \Delta x(t) \tag{9}$$

La (9) è proprio l'equazione che caratterizza un moto armonico, la cui soluzione generale sappiamo essere

$$\Delta x(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) \tag{10}$$

Ricordando la relazione (8) tra x e Δx, otteniamo la soluzione generale dell'Eq.(4)

$$x(t) = l_0 + C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11}$$

e la velocità è

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -C\omega \sin(\omega t) + D\omega \cos(\omega t) \tag{12}$$

Le costanti C e D si determinano imponendo le condizioni iniziali (5)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t=0) & = & l_0 + C \cos(\omega\, 0\mathrm{s}) + D \sin(\omega\, 0\mathrm{s}) = l_0 \\ \\ v(t=0) & = & -C\omega \sin(\omega\, 0\mathrm{s}) + D\omega \cos(\omega\, 0\mathrm{s}) = v_0 \end{array} \right. \tag{13}$$

da cui

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C & = & 0 \\ \\ D\omega & = & v_0 \qquad \Rightarrow D = \frac{v_0}{\omega} \end{array} \right. \tag{14}$$

Sostituendo i valori di C e D ottenuti nella soluzione generale (12) otteniamo

$$\boxed{x(t) = l_0 + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15}$$

e la velocità è

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos(\omega t)} \tag{16}$$

2. Calcoliamo l'energia cinetica

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m v^2 = \\ & \quad [\text{uso (16)}] \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2(\omega t) \end{aligned} \tag{17}$$

ossia

$$\boxed{E_k(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2(\omega t)} \tag{18}$$

che ha un andamento oscillatorio.

3. Calcoliamo l'energia potenziale. L'energia potenziale elastica è

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}k(x(t)-l_0)^2 = \\ & \text{[uso (15)]} \\ &= \frac{1}{2}k\frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2(\omega t) = \\ & \text{[uso (7)]} \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2(\omega t) \end{aligned} \tag{19}$$

Anche E_p ha un andamento oscillatorio, sfasato rispetto a quello dell'energia cinetica E_k.

$$\boxed{E_p(t) = \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2(\omega t)} \tag{20}$$

4. Calcoliamo ora l'energia meccanica

$$\begin{aligned} E_m &= E_k(t)+E_p(t) = \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega t)+\frac{1}{2}mv_0^2\sin^2(\omega t) = \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned} \tag{21}$$

Dunque, mentre l'energia cinetica e l'energia potenziale dipendono dal tempo, l'energia meccanica è indipendente dal tempo, ossia si conserva, come mostrato in Fig.1

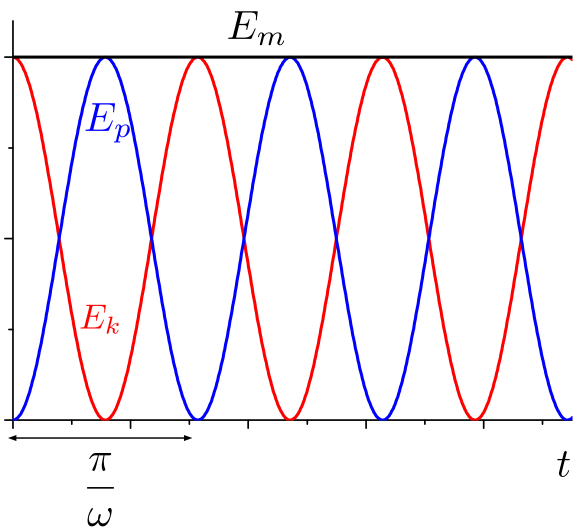


Figure 1: Andamento nel tempo dell'energia cinetica E_k, energia potenziale elastica E_p, e dell'energia meccanica. Mentre E_k e E_p variano nel tempo [vedi Eq.(18) e (20)], la loro somma E_m rimane costante, e pari all'energia iniziale (in questo caso $\frac{1}{2}mv_0^2$).

$$E_m \text{ si conserva} \tag{22}$$

$$\Updownarrow$$

$$E_m \text{ è costante nel tempo} \tag{23}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta E_m = 0 \qquad \text{(la variazione di } E_m \text{ è nulla)} \tag{24}$$

5. Denotiamo ora con t_A l'istante in cui il punto materiale raggiunge il punto A di massimo allungamento della molla a destra e indichiamo con Δx_{max} tale allungamento massimo. Allora per definizione

$$\Delta x(t_A) = \Delta x_{\max}$$

In corrispondenza dell'allungamento massimo il corpo m si trova alla coordinata $x(t_A) = l_0 + \Delta x_{max}$.

Dato che l'energia meccanica si conserva possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} E_m(t=0) &= E_m(t_A) \\ &\Downarrow \\ E_k(t=0) + E_p(t=0) &= E_k(t_A) + E_p(t_A) \end{aligned} \tag{25}$$

Osserviamo ora che

- all'istante $t = 0$ l'energia cinetica vale

$$E_k(t=0) = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{26}$$

- all'istante $t = 0$ l'energia potenziale elastica è nulla perché il corpo si trova esattamente alla lunghezza di riposo della molla (la molla non è allungata né compressa)

$$E_p(t=0) = \frac{1}{2} k \left(x(t=0) - l_0\right)^2 = 0\,\mathrm{J} \tag{27}$$

- all'istante $t = t_A$ di massimo allungamento l'energia cinetica si annulla, dato che il punto di massimo allungamento è caratterizzato proprio dal fatto che la velocitè a si annulla (la direzione del moto si inverte)

$$E_p(t_A) = 0\,\mathrm{J} \tag{28}$$

- all'istante $t = t_A$ di massimo allungamento l'energia potenziale elastica vale

$$E_p(t_A) = \frac{1}{2} k \left(\Delta x_{max}\right)^2 \tag{29}$$

Sostituendo (26), (27), (28) e (29) in (25) otteniamo

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \quad = \quad \frac{1}{2} k \left(\Delta x_{max}\right)^2 \tag{30}$$

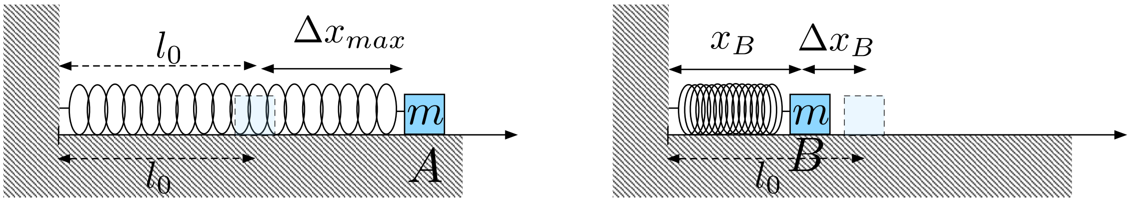
da cui otteniamo che l'allungamento massimo è determinato da

$$\left(\Delta x_{max}\right)^2 = \frac{m}{k} v_0^2 \tag{31}$$

Dato che si tratta di un allungamento, Δx_{max} è positivo ($\Delta x_{max} > 0$); se fosse una compressione sarebbe $\Delta x_{max} < 0$. Pertanto scegliamo la radice positiva. Ricordando inoltre (7) otteniamo

$$\Delta x_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 \tag{32}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene



$$\begin{aligned}
\Delta x_{max} &= \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0 = \\
&= \sqrt{\frac{1.5\,\mathrm{kg}}{2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}}\,0.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
&\quad \text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2} \\
&= \sqrt{\frac{0.75\,\mathrm{kg}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s^2}}}}\,0.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\
&= \sqrt{0.75\,\mathrm{s^2}}\,0.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\
&= 0.17\,\mathrm{m} \qquad (33)
\end{aligned}$$

La coordinata del punto di massimo allungamento vale dunque

$$\begin{aligned}
x_A &= l_0 + \Delta x_{max} = \\
&= l_0 + \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0 = \\
&= 0.50\,\mathrm{m} + 0.17\,\mathrm{m} = \\
&= 0.67\,\mathrm{m} \qquad (34)
\end{aligned}$$

6. Denotiamo ora con t_B l'istante in cui il punto materiale raggiunge il punto B (a sinistra della posizione della lunghezza a riposo) che corrisponde ad una variazione $\Delta x_B = -\Delta x_{max}/2$ (negativa = compressione). Dato che l'energia meccanica si conserva possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}
E_m(t=0) &= E_m(t_B) \\
&\Downarrow \\
E_k(t=0) + E_p(t=0) &= E_k(t_B) + E_p(t_B) \qquad (35)
\end{aligned}$$

I valori di $E_k(t=0)$ e $E_p(t=0)$ sono stati determinati in (26) e (27), mentre

- all'istante $t=0$ l'energia cinetica vale

$$E_k(t_B) = \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad (36)$$

  dove v_B è la velocità al punto B (da daterminarsi)

- all'istante $t = t_B$ l'energia potenziale elastica vale

$$\begin{aligned}
E_p(t_B) &= \frac{1}{2}k\,(\Delta x_B)^2 = \\
&= \frac{1}{2}k\left(-\frac{\Delta x_{max}}{2}\right)^2 = \\
&\quad [\text{uso ora la (32)}] \\
&= \frac{1}{2}k\,\frac{m}{4k}\,v_0^2 = \\
&= \frac{1}{8}m\,v_0^2 \qquad (37)
\end{aligned}$$

Sostituendo (26), (27), (36) e (37) in (35) otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \quad = \quad \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{8}m\,v_0^2 \tag{38}$$

Semplificando per $m/2$ otteniamo

$$v_B^2 = \frac{3}{4}v_0^2 \tag{39}$$

In conclusione

$$v_B = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}v_0 \tag{40}$$

dove il segno '-' si riferisce a quando il corpo viaggia verso sinistra, ed il segno '+' a quando il corpo sta ritornando verso la posizione di riposo della molla.