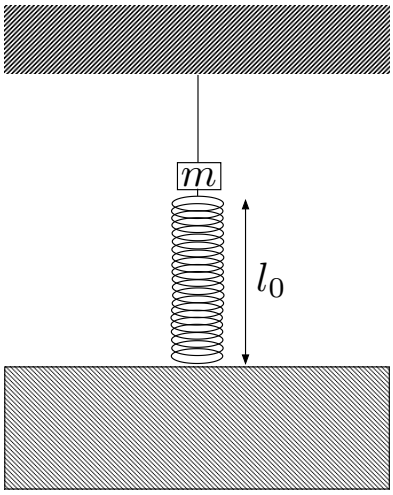
Esercizio (tratto dal Problema 2.6 del Mazzoldi)

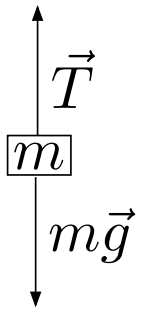
Un punto materiale di massa m è sospeso tramite un filo verticale ed è collegato al suolo da una molla, di costante elastica $k = 70\,\mathrm{N/m}$, che si trova alla lunghezza di riposo l_0. La tensione del filo è $T = 4.9\,\mathrm{N}$. Il filo viene ora tagliato.



Calcolare:

1. la massima distanza percorsa dal punto;
2. la posizione in cui la velocità è massima;
3. il valore massimo della velocità.

SOLUZIONE:
Dati noti:
$k = 70\,\mathrm{N/m}$
$T = 4.9\,\mathrm{N}$



Prima che il filo venga tagliato, la molla non esercita alcuna forza sul punto materiale (dato che la molla è in condizioni di riposo). Il punto materiale è dunque fermo per l'equilibrio tra la forza peso e la tensione T del filo. Pertanto in modulo abbiamo

$$\begin{aligned} T &= mg \\ &\Rightarrow \; m = \frac{T}{g} \end{aligned} \tag{1}$$

Quando si taglia il filo, il punto materiale è soggetto alla forza peso e alla forza elastica della molla. Per trovare le quantità richieste possiamo procedere in due modi:

PRIMO MODO (Bilancio Energetico):
Le forze che agiscono sul sistema sono (lungo la direzione verticale, asse z verso l'alto)

$$\begin{cases} \text{forza peso} & F = -mg \\ \text{forza elastica} & F = -k(z - l_0) \end{cases}$$

Siccome sono forze conservative, l'energia meccanica è conservata. L'energia meccanica in questo sistema è data da:

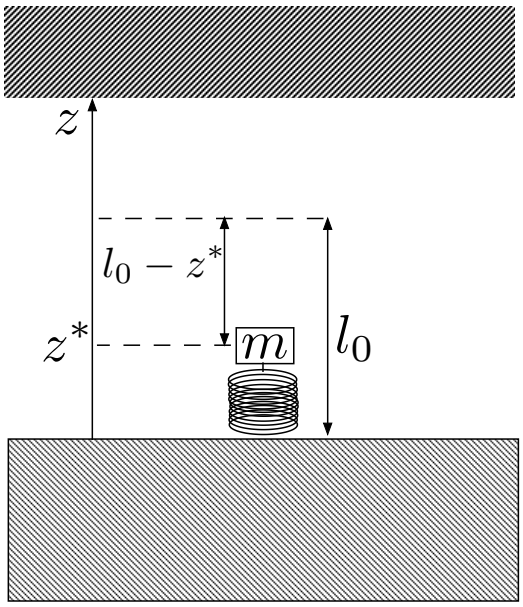
$$E_m = \underbrace{\text{energia cinetica}}_{\frac{1}{2}mv^2} + \underbrace{\text{en. potenz. gravitazionale}}_{mgz} + \underbrace{\text{en. potenz. elastica}}_{\frac{k}{2}(z-l_0)^2}$$

1. Trovare la massima distanza percorsa dal punto materiale corrisponde a trovare di quanto si comprime la molla rispetto alla lunghezza iniziale (=lunghezza a riposo). All'istante iniziale la velocità è nulla e la molla si trova nella posizione di riposo ($z = l$):

$$E_m^{in} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{=0} + mgl_0 + \underbrace{\frac{1}{2}k(l_0 - l_0)^2}_{=0} \tag{2}$$

All'istante in cui il corpo raggiunge l'altezza minima (la molla non è necessariamente compressa completamente!) la velocità è nuovamente nulla. Denotando con

$$z^* = \text{altezza minima raggiunta} \tag{3}$$



abbiamo

$$E_m^{fin} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{=0} + mgz^* + \frac{1}{2}k(l_0 - z^*)^2 \tag{4}$$

Per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\begin{aligned} E_m^{in} &= E_m^{fin} \\ mgl_0 &= mgz^* + \frac{1}{2}k(l_0 - z^*)^2 \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{2}k(l_0 - z^*)^2 - mg(l_0 - z^*) = 0 \\ & (l_0 - z^*)\left(\frac{1}{2}k(l_0 - z^*) - mg\right) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Abbiamo due soluzioni

(a) $l_0 - z^* = 0 \quad \Rightarrow \quad z^* = l$
(corrisponde all'istante iniziale, in cui infatti l'energia cinetica è nulla)

(b) $\frac{1}{2}k(l_0 - z^*) = mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{l_0 - z^*}_{\Delta z} = \frac{2mg}{k}$

da cui $\Delta z = \frac{2mg}{k}$ Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{2mg}{k} = \frac{2T}{k} = \\ & \frac{2 \cdot 4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = \\ &= 0.14\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{6}$$

2. Per determinare l'altezza $\bar{z}$ a cui il corpo raggiunge la velocità massima sfrutto la conservazione dell'energia meccanica, che vale istante per istante. Ad un generico istante il punto materiale si trova ad un data altezza z e abbiamo

$$E_m(z) = mgz + \frac{1}{2}mv^2(z) + \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 \tag{7}$$

e per la conservazione dell'energia

$$\begin{aligned} E_m^{in} &= E_m(z) \qquad \forall z \\ mgl_0 &= mgz + \frac{1}{2}mv^2(z) + \frac{1}{2}k(l_0 - z)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

da cui

$$\frac{1}{2}mv^2(z) = -\frac{1}{2}k(l_0 - z)^2 + mg(l_0 - z)$$

e dunque

$$v(z) = -\sqrt{-\frac{k}{m}(l_0 - z)^2 + 2g(l_0 - z)} \tag{9}$$

(dove abbiamo scelto il segno $-$ davanti alla radice quadrata perché stiamo considerando la fase in cui il punto materiale scende).

Controllo dimensionale:

$$\left[\frac{k}{m}(l_0 - z)^2\right] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m\,Kg}}\mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{K\cancel{g}\ m}}{\mathrm{s^2\,K\cancel{g}}}\ \mathrm{m} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \tag{10}$$

$$[2g(l_0 - z)] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ \mathrm{m} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \tag{11}$$

OK

L'altezza $\bar{z}$ in cui la velocità è massima è dato dalla soluzione di

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= 0 \\ -\frac{+\frac{2k}{m}(l_0 - \bar{z}) - 2g}{2\sqrt{-\frac{k}{m}(l_0 - \bar{z})^2 + 2g(l_0 - \bar{z})}} &= 0 \\ \frac{2k}{m}(l_0 - \bar{z}) - 2g &= 0 \\ \Rightarrow\ l_0 - \bar{z} &= \frac{mg}{k} \end{aligned} \tag{12}$$

Lo scostamento vale dunque

$$l_0 - \bar{z} = \frac{mg}{k} = \frac{T}{k} \tag{13}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} l_0 - \bar{z} &= \frac{mg}{k} = \frac{4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = \\ &= 0.07\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{14}$$

Osservazione:
Un altro modo diretto per trovare l'altezza in cui la velocità è massima è il seguente: La velocità è massima quando l'accelerazione è nulla, ossia quando la somma delle forze che agiscono sul corpo è nulla. Dunque l'altezza in cui la velocità è massima viene raggiunta all'altezza $\bar{z}$ (incognita) alla quale la forza elastica e la forza peso si bilanciano esattamente:

$$\underbrace{+k(l_0-\bar{z})}_{\substack{\text{forza elastica}\\ \text{(verso l'alto)}}} \quad \underbrace{-mg}_{\substack{\text{forza peso}\\ \text{(verso il basso)}}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad l_0-\bar{z}=\frac{mg}{k} \tag{15}$$

Lo scostamento vale dunque

$$l_0-\bar{z}=\frac{mg}{k}=-\frac{T}{k}=\frac{4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}=0.07\,\mathrm{m} \tag{16}$$

3. Il valore massimo della velocità è dato (in modulo) da

$$\begin{aligned}
v_{max} &= |v(\bar{z})| = \\
&= \sqrt{-\frac{k}{m}(l_0-\bar{z})^2-2g(l_0-\bar{z})} = \\
&\quad [\text{usiamo } l_0-\bar{z}=\tfrac{mg}{k}] \\
&= \sqrt{-\frac{k}{m}\frac{(mg)^2}{k^2}+2g\frac{mg}{k}} \\
&= \sqrt{-\frac{mg^2}{k}+2\frac{mg^2}{k}} \\
&= \sqrt{\frac{mg^2}{k}} \\
&\quad [\text{usiamo } mg=T \text{ dalla (1)}] \\
&= \sqrt{\frac{Tg}{k}}
\end{aligned} \tag{17}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned}
v_{max} &= \sqrt{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\frac{4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = \\
&= \sqrt{\frac{9.81\,\cdot 4.9}{70}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = \\
&= 0.83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned} \tag{18}$$

SECONDO MODO (Equazione del moto):
Possono anche risolvere il problema utilizzando direttamente le equazioni della dinamica

$$\begin{aligned} F &= ma \\ F_{peso} + F_{el} &= m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \tag{19}$$

$$-mg \underbrace{+k(l_0 - z)}_{\text{forza elastica}} = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Osserviamo che

se $z < l_0$ la forza elastica è pos $\rightarrow$ diretta verso l'alto
se $z > l_0$ la forza elastica è neg $\rightarrow$ diretta verso il basso

Pertanto abbiamo **l'equazione differenziale**

$$\boxed{m\frac{d^2z}{dt^2} = -k(z(t) - l_0) - mg} \tag{20}$$

Lo scopo è trovare la funzione $z(t)$ che soddisfi tale equazione, con le **condizioni iniziali**

$$\boxed{\begin{cases} z(t=0) = l_0 & \text{(all'inizio il punto si trova a } z = l\text{)} \\ \frac{dz}{dt}(t=0) = 0 & \text{(parte con velocità nulla)} \end{cases}} \tag{21}$$

Per risolvere l'equazione differenziale (20) procediamo in questo modo

- Osserviamo che la (20) si può riscrivere come

$$\begin{aligned} m\frac{d^2z}{dt^2} &= \underbrace{-k(z - l_0)}_{\text{forza elastica}} \underbrace{-mg}_{\text{peso}} = \\ &= -k\left(z - \underbrace{\left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)}\right) = \\ &= -k(z - l_0') \end{aligned} \tag{22}$$

  con

$$l_0' = l_0 - \frac{mg}{k} \tag{23}$$

  In tal modo l'Eq.(20) acquista la forma

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -k(z - l_0') \tag{24}$$

  che rappresenta l'equazione del moto per un punto materiale soggetto ad una molla efficace con la stessa costante elastica k, ma con una lunghezza a riposo l_0' anziché l_0.
  Abbiamo pertanto ricondotto il problema a quello di una molla efficace che ingloba sia la molla originaria che la forza peso

Forza elastica di una molla con lunghezza a riposo l_0	$+$	Forza costante $(= -mg)$	$\Leftrightarrow$	Forza elastica di una molla con lunghezza a riposo $l_0' = l_0 - mg/k$

- Osservando ora che l_0' è una costante, possiamo scrivere la (24) anche come

$$m\frac{d^2(z-l_0')}{dt^2} = -k(z-l_0') \tag{25}$$

Possiamo allora introdurre una variabile ξ che denota lo scostamento dalla posizione di equilibrio

$$\xi(t) \quad = \quad z(t) - l_0' \tag{26}$$

e l'Eq.(25) acquista la forma

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi \tag{27}$$

Definendo infine

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{28}$$

l'equazione (27) diventa

$$\boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0} \tag{29}$$

che è l'equazione del moto armonico, le cui soluzioni sono ben note, e sono della forma

$$\xi(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \tag{30}$$

In conclusione, ricordando la relazione (26) e l'espressione (23) per l_0', abbiamo

$$z(t) = l_0 - \frac{mg}{k} + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{31}$$

Questa è la soluzione generale dell'Equazione differenziale (20) e la relativa legge oraria della velocità è

$$v(t) = \frac{dz}{dt} = -C\omega\sin(\omega t) + D\omega\cos(\omega t) \tag{32}$$

- Il valore delle costanti C e D si determina imponendo che la soluzione generale soddisfi le particolari condizioni iniziali (21). Dunque abbiamo

$$\begin{cases} z(t=0) & = & l_0 - \frac{mg}{k} + C = l_0 \\ v(t=0) & = & D\omega = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C & = & \frac{mg}{k} \\ D & = & 0 \end{cases} \tag{33}$$

Pertanto la legge oraria della posizione (31) e la legge oraria della velocità (32) diventano

$$\boxed{z(t) = l_0 - \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\cos(\omega t)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{34}$$

e

$$\boxed{v(t) = -\omega\frac{mg}{k}\sin(\omega t)} \tag{35}$$

Avendo trovato la legge oraria del punto materiale possiamo ora rispondere ai vari quesiti del problema:

1. La massima distanza percorsa corrisponde all'altezza minima raggiunta dal punto materiale; denotiamo con z^* tale altezza (ancora ignota) e con t^* il tempo impiegato a raggiungerla (anch'esso ignoto). Dopo che il punto è sceso e ha compresso la molla fino all'altezza z^*, la molla si estende e il punto materiale viene proiettato verso l'alto. All'altezza z^* la velocità si annulla e dunque il punto z^* è determinato dalla condizione

$$v(t^*) = 0 \tag{36}$$

Sostituendo nell'espressione (35) otteniamo

$$0 = v(t^*) = -\omega \frac{mg}{k} \sin \omega t^* \tag{37}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{aligned} i)\ t &= 0 \text{ (corrisponde all'istante iniziale, in cui infatti la vel. è nulla)} \\ ii)\ \omega t^* &= \pi \rightarrow t^* = \tfrac{\pi}{\omega} \text{ (corrisponde all'altezza minima)} \end{aligned} \tag{38}$$

Pertanto l'altezza minima vale

$$\begin{aligned} z^* &= z(t^*) = l_0 - \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \underbrace{\cos(\omega t^*)}_{=-1,\text{vedi Eq.(38)}} = \\ &= l_0 - \frac{2mg}{k} \end{aligned} \tag{39}$$

E dunque la deviazione massima dalla posizione iniziale di equilibrio vale

$$l_0 - z^* = \frac{2mg}{k} \tag{40}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned} l_0 - z^* &= \frac{2mg}{k} = \frac{2T}{k} = \\ & \frac{2 \cdot 4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = \\ &= 0.14\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{41}$$

2. Il punto materiale parte inizialmente con velocità nulla, e poi si ferma istantanemente all'altezza z^* trovata al punto precedente. Quindi durante la discesa la velocità cresce fino ad un certo valore massimo, per poi decrescere fino ad annullarsi nuovamente. Denotiamo con $\bar{t}$ l'istante in cui la velocità è massima. Dall'espressione (35) per la velocità possiamo vedere l'istante $\bar{t}$ è determinato dalla condizione

$$\frac{dv}{dt} = 0 \tag{42}$$

ossia

$$-\frac{mg}{k}\omega^2 \cos(\omega \bar{t}) = 0 \qquad \Rightarrow \omega \bar{t} = \frac{\pi}{2} \tag{43}$$

Denotando con $\bar{z}$ la posizione corrispondente al massimo della velocità, abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{z} &= z(\bar{t}) = l_0 - \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \underbrace{\cos \omega \bar{t}}_{=0} = \\ &= l_0 - \frac{mg}{k} \end{aligned} \tag{44}$$

che devia dalla posizione iniziale di equilibrio di una quantità

$$l_0 - \bar{z} = \frac{mg}{k} \tag{45}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} l_0 - \bar{z} &= \frac{mg}{k} = \frac{4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = \\ &= 0.07\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{46}$$

3. Il valore della velocità massima è (per definizione di istante $\bar{t}$)

$$\begin{aligned} v_{max} &= |v(\bar{t})| = \\ &= |\frac{mg\omega}{k}\sin\omega\bar{t}| = \\ &= \frac{mg\omega}{k} = \\ & \quad [\text{uso } \omega = \sqrt{\tfrac{k}{m}}] \\ &= \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{m}} = \\ &= \sqrt{\frac{mg^2}{k}} = \\ & \quad [\text{uso } mg = T] \\ &= \sqrt{\frac{Tg}{k}} \end{aligned} \tag{47}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} v_{max} &= \sqrt{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\frac{4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = \\ &= \sqrt{\frac{9.81\,\cdot 4.9}{70}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = \\ &= 0.83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{48}$$