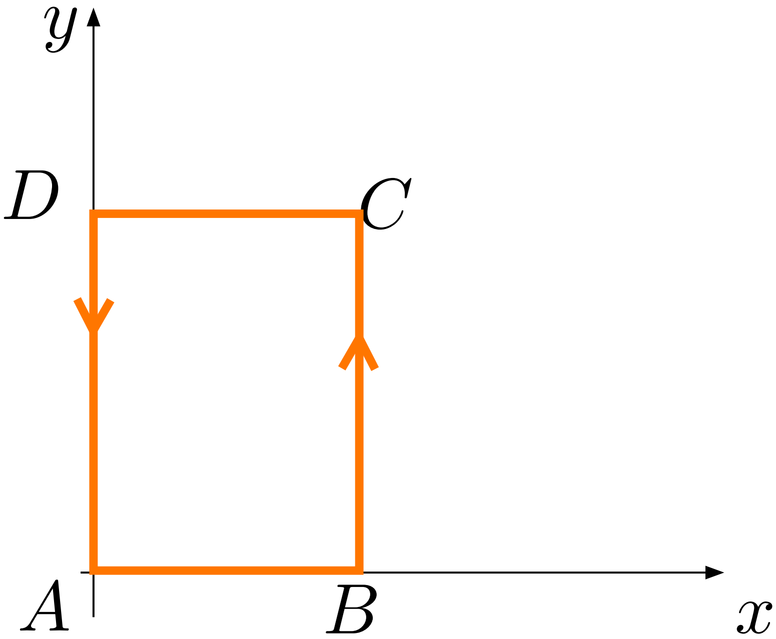
Esercizio (tratto dal Problema 4.12 del Mazzoldi 2)

Un punto materiale soggetto all'azione di una forza $\vec{F} = a\,y^2\hat{u}_x + bx^2y\,\hat{u}_y$ si muove sul piano orizzontale (x,y) lungo un percorso rettangolare chiuso ABCD, come in figura. Le coordinate di C sono $(2\mathrm{m}, 3\mathrm{m})$.

1. determinare le unità di misura delle costanti a e b;
2. calcolare il lavoro compiuto dalla forza lungo il percorso chiuso
3. valutare il lavoro esplicitamente nel caso $a = 3\,\mathrm{N/m^2}$ e $b = 2\,\mathrm{N/m^3}$;
4. la forza $\vec{F}$ è conservativa?



SOLUZIONE

DATI NOTI
$A = (x_A, y_A) = (0,0)\,\mathrm{m}$
$B = (x_B, y_B) = (2,0)\,\mathrm{m}$
$C = (x_C, y_C) = (2,3)\,\mathrm{m}$
$D = (x_D, y_D) = (0,3)\,\mathrm{m}$

1. La forza $\vec{F}$ è data da

$$\vec{F} = \underbrace{a\,y^2}_{F_x}\,\hat{u}_x + \underbrace{bx^2y}_{F_y}\,\hat{u}_y \qquad \rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} F_x(x,y) & = & a\,y^2 \\ \\ F_y(x,y) & = & b\,x^2y \end{array} \right. \tag{1}$$

Dato che ciascuna componente della forza ha le dimensioni del Newton, abbiamo che

$$\mathrm{N} \;=\; [F_x] = [a]\,[y]^2 = [a]\,\mathrm{m}^2 \qquad \rightarrow \qquad [a] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \tag{2}$$

$$\mathrm{N} \;=\; [F_y] = [b]\,[x]^2\,[y] \;= [b]\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{m} \qquad \rightarrow \qquad [b] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3} \tag{3}$$

2. Calcoliamo ora il lavoro della forza $\vec{F}$ lungo il percorso chiuso ABCD

$$W = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint (F_x\,dx + F_y\,dy) \tag{4}$$

valutando separatamente il contributo di ciascuno dei 4 tratti:

(a) **tratto** $A \rightarrow B$
Lungo questo tratto si ha:

- varia solo la coordinata x, che va da x_A a x_B.
- la coordinata y rimane costantemente uguale a 0, e dunque $dy = 0$,

Pertanto l'integrale (4) si riduce ad un integrale in x

$$\begin{aligned} W^{A\rightarrow B} &= \int_A^B (F_x\,dx + F_y \underbrace{dy}_{=0}) = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} F_x\,dx = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} a\,\underbrace{y^2}_{=0}\,dx = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

e dunque

$$W^{A\rightarrow B} = 0 \tag{6}$$

(b) **tratto** $B \to C$
Lungo questo tratto si ha:

- varia solo la coordinata y, che va da y_B a y_C.
- la coordinata a rimane costantemente uguale a $x_B \equiv x_C$, e dunque $dx = 0$,

Pertanto l'integrale (4) si riduce ad un integrale in y

$$\begin{aligned} W^{B\to C} &= \int_B^C (F_x \underbrace{dx}_{=0} + F_y\, dy) = \\ &= \int_{y_B}^{y_C} F_y\, dy = \\ &= \int_{y_B}^{y_C} b \underbrace{x^2}_{\equiv x_B^2} y\, dy = \\ &= b x_B^2 \int_{y_B}^{y_C} y\, dy = \\ &= b x_B^2 \left(\frac{y_C^2}{2} - \frac{y_B^2}{2} \right) = \end{aligned}$$

Osservando che $y_B = 0$ si ottiene

$$W^{B\to C} = \frac{b}{2} x_B^2\, y_C^2 \tag{7}$$

(c) **tratto** $C \to D$
Lungo questo tratto si ha:

- varia solo la coordinata x, che va da x_C a x_D.
- la coordinata y rimane costantemente uguale a $y_C \equiv y_D$, e dunque $dy = 0$,

Pertanto l'integrale (4) si riduce ad un integrale in x

$$\begin{aligned} W^{C\to D} &= \int_C^D (F_x\, dx + F_y \underbrace{dy}_{=0}) = \\ &= \int_{x_C}^{x_D} F_x\, dx = \\ &= \int_{x_C}^{x_D} a \underbrace{y^2}_{=y_C^2} dx = \\ &= a y_C^2 \int_{x_C}^{x_D} dx = \\ &= a y_C^2 (x_D - x_C) \end{aligned}$$

Osservando che $x_D = 0$ si ottiene

$$W^{C\to D} = -a\, y_C^2\, x_C \tag{8}$$

(d) **tratto** $D \to A$
Lungo questo tratto si ha:

- varia solo la coordinata y, che va da y_D a y_A.
- la coordinata a rimane costantemente uguale a 0, e dunque $dx = 0$,

Pertanto l'integrale (4) si riduce ad un integrale in y

$$\begin{aligned} W^{D\to A} &= \int_D^A (F_x \underbrace{dx}_{=0} + F_y\, dy) = \\ &= \int_{y_D}^{y_A} F_y\, dy = \\ &= \int_{y_D}^{y_A} b \underbrace{x^2}_{\equiv 0} y\, dy \end{aligned}$$

e dunque

$$W^{D\to A} = 0 \tag{9}$$

Il lavoro totale si ottiene sommando tutti i contributi

$$\begin{aligned} W^{A\to B\to C\to D} &= \underbrace{W^{A\to B}}_{=0} + \underbrace{W^{B\to C}}_{=\frac{b}{2} x_B^2\, y_C^2} + \underbrace{W^{C\to D}}_{=-a\, y_C^2\, x_C} + \underbrace{W^{D\to A}}_{=0} = \\ &= y_C^2 \left(\frac{b}{2} x_B^2 - a\, x_C \right) \end{aligned} \tag{10}$$

3. In particolare, nel caso $a = 3\,\mathrm{N/m^2}$ e $b = 2\,\mathrm{N/m^3}$, sostituendo i dati noti, si ottiene

$$\begin{aligned} W^{A\to B\to C\to D} &= (3\,\mathrm{m})^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\,\mathrm{N}}{\mathrm{m}^{\cancel{3}}} (2\,\cancel{\mathrm{m}})^2 - \frac{3\,\mathrm{N}}{\mathrm{m}^{\cancel{2}}} \cdot 2\,\cancel{\mathrm{m}} \right) = \\ &= 9\,(4-6)\, \underbrace{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}_{=\mathrm{J}} = \\ &= -18\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{11}$$

4. La forza è certamente NON conservativa, dal momento che esiste almeno un percorso chiuso (ossia ABCD) lungo cui l'integrale della forza non è nullo.