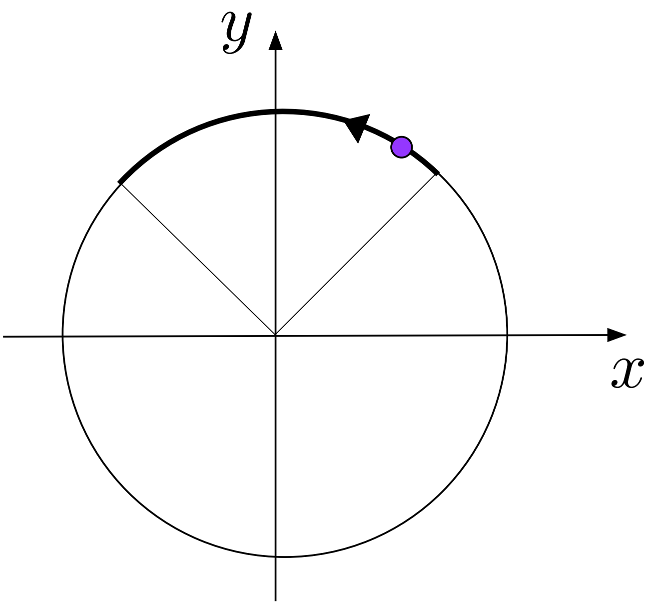
Esercizio

Una particella di massa $m = 350\,\text{gr}$ si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 50\,\text{cm}$ con moto circolare uniformemente accelerato. L'accelerazione angolare vale $\alpha = 3\,\text{s}^{-2}$. La particella parte da $\theta = 0$ con velocità angolare iniziale $\omega_0 = 1\,\text{s}^{-1}$. Calcolare il lavoro della forza che agisce sulla particella lungo percorso $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.



SOLUZIONE

DATI NOTI
$m = 0.35\,\mathrm{kg}$
$R = 0.5\,\mathrm{m}$
$\alpha = 3\,\mathrm{s}^{-2}$
$\theta(t=0) = 0$
$\omega(t=0) = \omega_0 = 1\,\mathrm{s}^{-1}$;

- Il moto è circolare uniformemente accelerato, con condizioni iniziali $\theta(t=0) = 0$ e $\omega(t=0) = \omega_0$. Pertanto la legge oraria di θ vale
$$\theta(t) = \omega_0\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \tag{1}$$
e quella della velocità vale
$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha\, t \tag{2}$$
L'accelerazione è disegnata in Fig.1

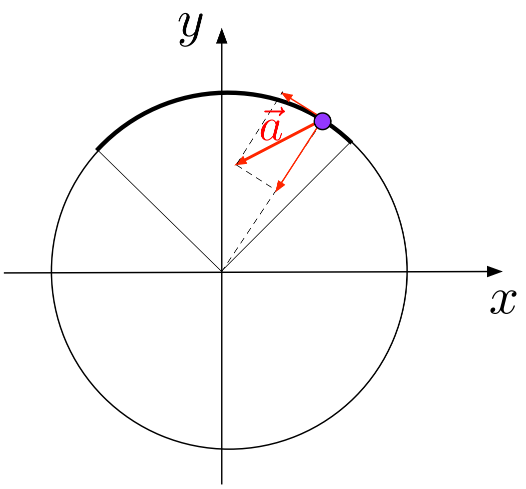


Figure 1: Il vettore accelerazione $\vec{a}$ della particella che si muove lungo la circonferenza, scomposto nelle sue componenti radiali e tangenziali. Di conseguenza il vettore forza vale $\vec{F} = m\vec{a}$)

- La forza che agisce sulla particella è data da
$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\left(a_r \hat{u}_r + a_\theta \hat{u}_\theta\right) \tag{3}$$
dove a_r e a_θ sono le componenti radiale e tangenziale dell'accelerazione che, per il moto circolare, valgono
$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_r &=& -\omega^2(t)\, R \\ \\ a_\theta &=& \alpha\, R = \mathrm{cost} \end{array} \right. \tag{4}$$
dove la componente tangenziale è costante nel tempo dato che il moto circolare è *uniformemente* accelerato.

- Il lavoro lungo l'arco $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ è dato da

$$\begin{aligned}
W_{\text{arco}} &= \int_{\text{arco}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \\
&= \int_{\text{arco}} m\,(\,a_r \hat{u}_r +\, a_\theta \hat{u}_\theta) \cdot Rd\theta\, \hat{u}_\theta = \\
&= m \int_{\text{arco}} \left(a_r \underbrace{\hat{u}_r \cdot \hat{u}_\theta}_{=0} + a_\theta \underbrace{\hat{u}_\theta \cdot \hat{u}_\theta}_{=1} \right) Rd\theta = \\
&= m \int_{\text{arco}} a_\theta R\, d\theta
\end{aligned}$$

Dato che il moto circolare è uniformemente accelerato, $a_\theta = R\alpha$ è costante, e si può portare fuori dall'integrale

$$\begin{aligned}
W_{\text{arco}} &= m a_\theta R \int_{\text{arco}} d\theta \\
&= m\,\alpha\, R^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta = \\
&= m\,\alpha\, R^2 \frac{\pi}{2} \qquad (5)
\end{aligned}$$

e dunque

$$W_{\text{arco}} = \frac{\pi}{2}\, m\,\alpha\, R^2 \qquad (6)$$

- Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{aligned}
W_{\text{arco}} &= \frac{\pi}{2}\, 0.35\,\text{kg} \cdot 3\, \frac{1}{\text{s}^2} \cdot (0.5\,\text{m})^2 = \\
&= \frac{\pi}{2}\, 0.35 \cdot 3\, \cdot 0.25\, \underbrace{\text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}_{=\text{J}} = \\
&= 0.412\,\text{J} \qquad (7)
\end{aligned}$$