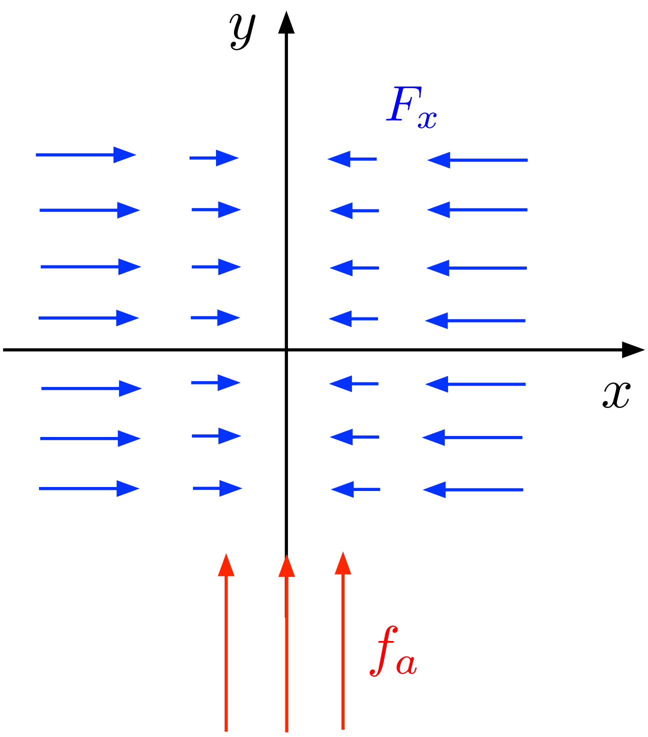
Esercizio

Una pallina di massa m si muove su un piano orizzontale x-y è attratta verso l'asse y da una forza non uniforme $F_x = -k\,x$, diretta lungo l'asse x, dove $k = 3\,\mathrm{N/m}$. Inoltre un getto d'aria soffia lungo l'asse y nel verso positivo imprimendo alla pallina una forza costante $f_a = 2\,\mathrm{N}$.

1. Considerare il percorso descritto dal segmento di retta $y = ax + b$ che va dal punto $A = (0,4)\,\mathrm{m}$ al punto $B = (6,1)\,\mathrm{m}$;
   (a) Disegnare il segmento di retta e determinare a e b;
   (b) Disegnare schematicamente la forza totale lungo tale segmento;
   (c) Calcolare il lavoro della forza totale lungo tale percorso.
2. Considerare il percorso descritto dal segmento di parabola $x = a + cy^2$ che va dal punto $C = (5,-3)\,\mathrm{m}$ al punto $D = (5,3)\,\mathrm{m}$ passando per il punto $C' = (2,0)\,\mathrm{m}$;
   (a) Disegnare il segmento di parabola e determinare le costanti a e c;
   (b) Disegnare schematicamente la forza totale lungo tale percorso;
   (c) Calcolare il lavoro della forza totale lungo tale percorso.



Fabrizio Dolcini (http://staff.polito.it/fabrizio.dolcini/)
Dipartimento di Scienza Applicata e Tecnologia, Politecnico di Torino - Esercitazioni di Fisica I

SOLUZIONE

DATI NOTI
Il testo ci dice che la pallina è soggetta ad una forza totale (elastica +aria)

$$\vec{F} = \underbrace{F_x}_{-k\,x} \vec{u}_x + \underbrace{F_y}_{f_{\mathrm{a}}} \vec{u}_y \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} F_x &= -k\,x \\ \\ F_y &= f_{\mathrm{a}} = \mathrm{cost} \end{cases} \tag{1}$$

con
$k = 3\,\mathrm{N/m}$
$f_a = 2\,\mathrm{N}$

Il testo ci chiede di calcolare il lavoro della forza totale $\vec{F}$ lungo diversi percorsi.

1. **percorso 1: segmento di retta**
   Consideriamo il segmento di retta $y = ax + b$.

   (a) Le costanti a e b si determinano facilmente imponendo che la retta passi per i punti:

   $$\begin{cases} A = (x_A, y_A) = (0,4)\,\mathrm{m} \\ B = (x_B, y_B) = (6,1)\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{2}$$

   ossia

   $$\begin{cases} y_A = a x_A + b \\ y_B = a x_B + b \end{cases} \tag{3}$$

   che è un sistema di due equazioni per le due incognite a e b.

   - Dalla prima equazione, osservando che $x_A = 0$ si ricava subito

   $$b = y_A = 4\,\mathrm{m} \tag{4}$$

   - Sottraendo la seconda dalla prima in (3) si ottiene

   $$\begin{aligned} y_A - y_B &= a(x_A - x_B) \qquad (5) \\ &\Downarrow \\ a &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \\ &= \frac{4\,\cancel{\mathrm{m}} - 1\,\cancel{\mathrm{m}}}{0\,\cancel{\mathrm{m}} - 6\,\cancel{\mathrm{m}}} = \\ &= -\frac{3}{6} = \\ &= -0.5 \qquad (6) \end{aligned}$$

   e dunque

   $$\begin{cases} b = 4\,\mathrm{m} \\ a = -0.5 \end{cases} \tag{7}$$

   Ricordando che a rappresenta la pendenza e b la distanza dell'origine dal punto d'intersezione con l'asse verticale, il segmento di retta è disegnato in Fig. 1.

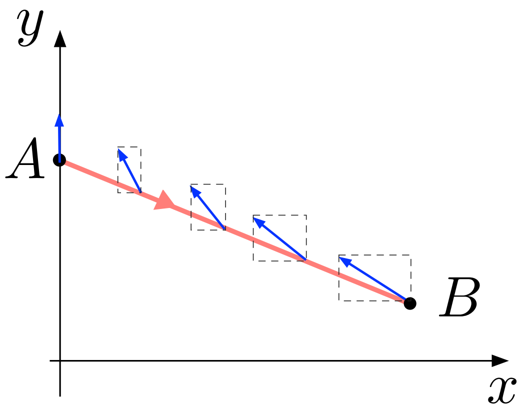


Figure 1:

(b) Per disegnare il vettore forze $\vec{F}$ lungo il segmento orientato, osserviamo che la forza (1) ha una componente $F_y = f_{\rm a} > 0$ (dovuta al getto d'aria) che è costante, mentre la componente elastica $F_x = -k\,x$, che punta verso l'asse y e che è in modulo tanto più grande quanto più la pallina si allontana dall'asse y. Il vettore forza è allora schematicamente rappresentato dalle frecce disegnate in Fig. 1 lungo il percorso.

(c) Il lavoro di $\vec{F}$ lungo il percorso è dato da

$$W^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x\,dx + F_y dy) \tag{8}$$

Le variabili x e y non sono tra loro indipendenti, ma sono legate tramite l'equazione della retta:

$$y = a\,x + b \tag{9}$$

Se scegliamo x come variabile indipendente, l'integrale (8) diventa un integrale in dx, dove:

-dalla (9) abbiamo

$$dy = a\,dx \tag{10}$$

- gli estremi di integrazione vanno da x_A a x_B.

Sostituendo nella (8) otteniamo

$$\begin{aligned}
W^{A\to B} &= \int_{x_A}^{x_B} (F_x\,dx + F_y a\,dx) = \\
&= \int_{x_A}^{x_B} (F_x + F_y\,a)\;dx = \\
&\quad \text{[sostituisco Eq.(1)]} \\
&= \int_{x_A}^{x_B} (-k\,x + f_{\rm a}\,a)\;dx = \\
&= -k\int_{x_A}^{x_B} x\,dx \;\; + f_{\rm a}\,a\int_{x_A}^{x_B} dx = \\
&= -k\left(\frac{x_B^2}{2} - \frac{x_A^2}{2}\right) \;\; + f_{\rm a}\,a(x_B - x_A) \;= \\
&\quad \text{[sostituisco Eq.(1)]} \\
&= -\frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2) + f_{\rm a}\,a(x_B - x_A)
\end{aligned} \tag{11}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} W^{A\to B} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{3\text{N}}{\text{m}}((6\,\text{m})^2-(0\,\text{m})^2)+\,2\,\text{N}\,\cdot(-0.5)\cdot((6\,\text{m})-(0\,\text{m}))= \\ &= (-54\cdot\text{N}\,\text{m}-6\,\text{N}\,\text{m})= \\ &= -60\,\underbrace{\text{N}\,\text{m}}_{=\text{J}}= \\ &= -60\,\text{J} \end{aligned} \tag{12}$$

Il fatto che sia negativo è confermato dall'orientazione reciproca del vettore spostamento e del vettore forza lungo lo spostamento.

2. **percorso 2: segmento di parabola**
   Consideriamo ora il segmento di parabola $x = a\,+c\,y^2$.

   (a) Le costanti a e c si determinano facilmente imponendo che la retta passi per i punti:

$$\begin{cases} C=(x_C,y_C)=(5,-3)\,\text{m} \\ C'=(x_{C'},y_{C'})=(2,0)\,\text{m} \\ D=(x_D,y_D)=(5,+3)\,\text{m} \end{cases} \tag{13}$$

ossia

$$\begin{cases} x_C=a+c\,y_C^2 \\ \\ x_{C'}=a+c\,y_{C'}^2 \\ \\ x_D=a+c\,y_D^2 \end{cases} \tag{14}$$

che è un sistema di tre equazioni in due incognite a e c. Osserviamo che in realtà la prima e la terza sono la stessa equazione, dato che $y_D^2=y_C^2$. Pertanto basta risolvere le prime due

$$\begin{cases} x_C=a+c\,y_C^2 \\ \\ x_{C'}=a+c\,y_{C'}^2 \end{cases} \tag{15}$$

- Dalla seconda equazione, osservando che $y_{C'}=0$ si ricava subito

$$a=x_{C'}=2\,\text{m} \tag{16}$$

- Dalla prima equazione ricaviamo

$$\begin{aligned} c &= \frac{x_C-a}{y_C^2}= \\ &= \frac{5\,\cancel{\text{m}}-2\,\cancel{\text{m}}}{(-3\,\text{m})^{\cancel{2}}}= \\ &= \frac{3}{9\,\text{m}}= \\ &= \frac{1}{3}\,\text{m}^{-1} \end{aligned} \tag{17}$$

e dunque

$$\begin{cases} a = 2\,\mathrm{m} \\ c = \frac{1}{3}\,\mathrm{m}^{-1} \end{cases} \tag{18}$$

Ricordando che la parabola $x = a + cy^2$ è simmetrica rispetto all'asse x, l'arco è disegnato in Fig. 2.

(b) Analogamente al caso precedente, per disegnare il vettore forze $\vec{F}$ lungo il segmento orientato, osserviamo che la forza (1) ha una componente $F_y = f_\mathrm{a} > 0$ (dovuta al getto d'aria) che è costante, mentre la componente elastica $F_x = -k\,x$, che punta verso l'asse y e che è in modulo tanto più grande quanto più la pallina si allontana dall'asse y. Il vettore forza è allora schematicamente rappresentato dalle frecce disegnate in Fig. 2 lungo il percorso.

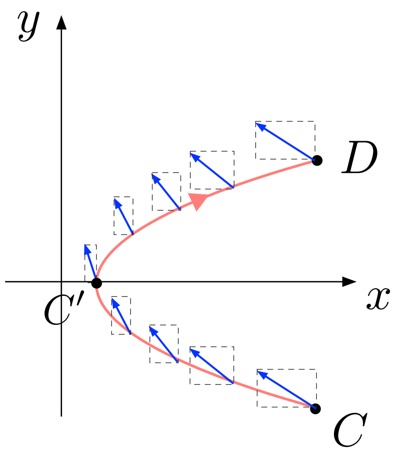


Figure 2:

(c) Il lavoro di $\vec{F}$ lungo il percorso è ancora dato da

$$W^{C\to D} = \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C^D (F_x\,dx + F_y dy) \tag{19}$$

Le variabili x e y non sono tra loro indipendenti, ma sono legate tramite l'equazione della retta:

$$x = a\ + c\,y^2 \tag{20}$$

In questo caso è decisamente più semplice usare y come variabile indipendente.

-dalla (20) abbiamo

$$dx = 2c\,y\,dy \tag{21}$$

- gli estremi di integrazione vanno da y_C a y_D.

Sostituendo nella (19) otteniamo

$$\begin{aligned}
W^{C\to D} &= \int_{y_C}^{y_D} (F_x\, 2c\, y\, dy + F_y\, dy) = \\
&= \int_{y_C}^{y_D} F_x\, 2c\, y dy + \int_{x_C}^{x_D} F_y\, dy = \\
& \quad \text{[sostituisco Eq.(1)]} \\
&= \int_{y_C}^{y_D} (-k\, x)\, 2c\, y dy + \int_{y_C}^{y_D} f_{\mathrm{a}}\, dy = \\
& \quad [\text{uso } x = a + c\, y^2] \\
&= -2\, k\, c \int_{y_C}^{y_D} (a + c\, y^2)\, y\, dy + f_{\mathrm{a}} \int_{y_C}^{y_D} dy = \\
&= -2\, k\, c \left(a \int_{y_C}^{y_D} y\, dy + c \int_{y_C}^{y_D} y^3\, dy \right) + f_{\mathrm{a}}(y_D - y_C) = \\
&= -2\, k\, c \left(a \left(\frac{y_D^2}{2} - \frac{y_C^2}{2} \right) + c \left(\frac{y_D^4}{4} - \frac{y_C^4}{4} \right) \right) + f_{\mathrm{a}}(y_D - y_C) = \\
&= -\, k\, c \Big(a \left(y_D^2 - y_C^2 \right) + \frac{c}{2} \left(y_D^4 - y_C^4 \right) \Big) + f_{\mathrm{a}}(y_D - y_C) \qquad (22)
\end{aligned}$$

osservando che $y_D = -y_C$ concludiamo che

$$W^{C\to D} = f_{\mathrm{a}}(y_D - y_C) \qquad (23)$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned}
W^{C\to D} &= 2\,\mathrm{N} \cdot ((3\,\mathrm{m}) - (-3\,\mathrm{m})) = \\
&= 12\, \underbrace{\mathrm{N\,m}}_{=\mathrm{J}} = \\
&= 12\,\mathrm{J} \qquad (24)
\end{aligned}$$