## Esercizio

Una particella di massa $m = 90\,\mathrm{gr}$ si muove sul piano verticale $x$-$y$. E' soggetta all'azione della forza peso e a quella di una forza elettrica uniforme $\vec{f_e} = f_e\,\hat{u}_x$ con $f_e = 50\,\mathrm{N}$.

1. Considerare il percorso descritto dal segmento di retta $y = ax + b$ che va dal punto $A = (0, 3)\,\mathrm{m}$ al punto $B = (1, 5)\,\mathrm{m}$;
   (a) Disegnare il segmento di retta e determinare $a$ e $b$;
   (b) Disegnare schematicamente il campo di forze lungo tale segmento;
   (c) Calcolare il lavoro della forza totale $\vec{F}$ sulla particella lungo tale percorso.
2. Considerare il percorso descritto dal segmento di parabola $y = a\,x^2 + x + c$ che va dal punto $C = (0, 1)\,\mathrm{m}$ al punto $D = (1, 5)\,\mathrm{m}$;
   (a) Disegnare il segmento di parabola e determinare le costanti $a$ e $c$;
   (b) Disegnare schematicamente il campo di forze lungo tale percorso;
   (c) Calcolare il lavoro della forza totale $\vec{F}$ sulla particella lungo tale percorso.

**SOLUZIONE**

**DATI NOTI**
Il testo ci dice che la forza totale che agisce sulla particella è data da

$$\vec{F} = \underbrace{F_x}_{f_e}\,\vec{u}_x + \underbrace{F_y}_{-mg}\,\vec{u}_y \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} F_x &= f_e = \text{cost} \\ F_y &= -mg = \text{cost} \end{cases} \tag{1}$$

dove:
$m = 0.9\,\text{kg}$
$g = 9.81\,\text{m/s}^2$
$f_e = 50\,\text{N}$.

Il testo ci chiede di calcolare il lavoro della forza totale $\vec{F}$ lungo diversi percorsi.

1. **percorso 1: segmento di retta**
   Consideriamo il segmento di retta $y = ax + b$.

   (a) Le costanti $a$ e $b$ si determinano facilmente imponendo che la retta passi per i punti:

   $$\begin{cases} A = (x_A, y_A) = (0, 3)\,\text{m} \\ B = (x_B, y_B) = (1, 5)\,\text{m} \end{cases} \tag{2}$$

   ossia

   $$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases} \tag{3}$$

   che è un sistema di due equazioni per le due incognite $a$ e $b$.

   - Dalla prima equazione, osservando che $x_A = 0$ si ricava subito

   $$b = y_A = 3\,\text{m} \tag{4}$$

   - Dalla seconda equazione ricaviamo

   $$\begin{aligned} a &= \frac{y_B - b}{x_B} = \\ &= \frac{5\,\cancel{\text{m}} - 3\,\cancel{\text{m}}}{1\,\cancel{\text{m}}} = \\ &= 2 \end{aligned} \tag{5}$$

   e dunque

   $$\begin{cases} b = 3\,\text{m} \\ a = 2 \end{cases} \tag{6}$$

   Ricordando che $a$ rappresenta la pendenza e $b$ la distanza dell'origine dal punto d'intersezione con l'asse verticale, il segmento di retta è disegnato in Fig. 1.

   (b) Il campo di forze (1) ha la componente $F_y$ diretta verso il basso, e la componente $F_x$ diretta verso destra. Pertanto il campo di forze $\vec{F}$ lungo tale segmento è schematicamente rappresentato dalle frecce disegnate in Fig. 1 lungo il percorso.

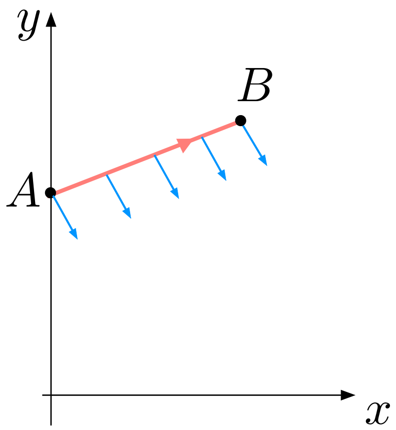


Figure 1:

(c) Il lavoro di $\vec{F}$ lungo il percorso $A \to B$ è dato da

$$W^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{7}$$

Possiamo calcolare il lavoro in vari modi:

- *modo 1*:
  Possiamo sfruttare il fatto che il campo di forze $\vec{F} = (f_e, -mg)$ è uniforme in tutti i punti lungo il percorso. Pertanto

$$\begin{aligned} W^{A\to B} &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \\ &= \vec{F}\cdot \underbrace{\int_A^B d\vec{r}}_{=\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A} = \\ &= \vec{F}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \\ &= (f_e\,,\,-mg)\cdot(x_B - x_A\,, y_B - y_A) = \\ &= f_e\,(x_B - x_A)\, - mg(y_B - y_A) \end{aligned} \tag{8}$$

  Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} W^{A\to B} &= 50\,\mathrm{N}\,(1\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m})\, - 0.9\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,(5\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{m}) = \\ &= 50\,\mathrm{N\,m} - 17.66\,\underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}_{=\mathrm{N}} = \\ &= 32.3\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{9}$$

- *modo 2* :
  Possiamo sfruttare la definizione di prodotto scalare e scrivere

$$W^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x\,dx + F_y dy) \tag{10}$$

  Le variabili $x$ e $y$ non sono tra loro indipendenti, ma sono legate tramite l'equazione della retta:

$$y = a\,x + b \tag{11}$$

Se scegliamo $x$ come variabile indipendente, l'integrale (44) diventa un integrale in $dx$, dove:

-dalla (11) abbiamo

$$dy = a\,dx \tag{12}$$

- gli estremi di integrazione vanno da $x_A$ a $x_B$.

Sostituendo nella (44) otteniamo

$$\begin{aligned}
W^{A\to B} &= \int_{x_A}^{x_B} (F_x\,dx + F_y a\,dx) = \\
&= \int_{x_A}^{x_B} (F_x + F_y\,a)\;dx = \\
&= (F_x + F_y\,a) \int_{x_A}^{x_B} dx = \\
&= (F_x + F_y\,a)\;(x_B - x_A) = \\
&\quad \text{[sostituisco Eq.(1), (2) e (6)]} \\
&= (f_e - 2mg\,) \cdot\; (x_B - x_A) \qquad (13)
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned}
W^{A\to B} &= (50\,\mathrm{N} - 2\cdot 0.9\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2})\;(1\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m}) = \\
&= \left(50\,\mathrm{N} - 17.66 \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}}}_{=\mathrm{N}}\right)\;\mathrm{m} = \\
&= 32.3\;\underbrace{\mathrm{N\,m}}_{=\mathrm{J}} = \\
&= 32.3\,\mathrm{J} \qquad (14)
\end{aligned}$$

- *modo 3* :
  Sfruttiamo ancora la definizione di prodotto scalare

$$W^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x\,dx + F_y dy) \tag{15}$$

Di nuovo, le variabili $x$ e $y$ non sono tra loro indipendenti, ma sono legate tramite l'equazione della retta:

$$y = a\,x + b \tag{16}$$

Se ora scegliamo $y$ come variabile indipendente, l'integrale (44) diventa un integrale in $dy$, dove:

-dalla (35) abbiamo

$$x = \frac{y-b}{a} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{dy}{a} \tag{17}$$

- gli estremi di integrazione vanno da $y_A$ a $y_B$.

Sostituendo nella (44) otteniamo

$$\begin{aligned} W^{A\to B} &= \int_{y_A}^{y_B} \left( F_x \frac{dy}{a} + F_y a\, dy \right) = \\ &= \int_{y_A}^{y_B} \left( \frac{F_x}{a} + F_y \right) dy = \\ &= \left( \frac{F_x}{a} + F_y \right) \int_{y_A}^{y_B} dy = \\ &= \left( \frac{F_x}{a} + F_y \right) (y_B - y_A) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} W^{A\to B} &= (25\,\mathrm{N} - 0.9\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2})\,(5\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{m}) = \\ &= \left( 25\,\mathrm{N} - 8.83 \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}}}_{=\mathrm{N}} \right) \cdot 2\,\mathrm{m} = \\ &= 32.3\,\underbrace{\mathrm{N\,m}}_{=\mathrm{J}} = \\ &= 32.3\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{19}$$

- *modo 4* :
  Dato che la forza totale è la somma della forza peso e di quella elettrica, possiamo scomporre il lavoro nel lavoro della forza peso ed in quello della forza $\vec{f_e}$

$$W^{A\to B} = W_{peso}^{A\to B} \; + \; W_e^{A\to B} \tag{20}$$

  - Il lavoro della forza peso è facilmente calcolabile sfruttando il fatto che, essendo conservativa

$$\begin{aligned} W_{peso}^{A\to B} &= -\Delta E_{p,peso}^{A\to B} = \\ &= -\left(E_{p,peso}(B) - E_{p,peso}(A)\right) = \\ &= -\left(mgy_B - mgy_A\right) = \\ &= mg(y_A - y_B) \end{aligned} \tag{21}$$

    Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} W_{peso}^{A\to B} &= 0.9\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}(3\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m}) = \\ &= 0.9\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}(3\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m}) = \\ &= -17.66\,\underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}}_{=\mathrm{J}} = \\ &= -17.66\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{22}$$

– Il lavoro della forza $\vec{f_e}$ si calcola direttamente

$$\begin{aligned} W_e^{A\to B} &= \int_A^B \vec{f}_e \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_A^B f_e \hat{u}_x \cdot (dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y) = \\ &= \int_A^B \left( f_e\,dx \underbrace{\hat{u}_x \cdot \hat{u}_x}_{=1} + f_e\,dy \underbrace{\hat{u}_x \cdot \hat{u}_y}_{=0} \right) = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} f_e\,dx = \\ &= f_e \int_{x_A}^{x_B} dx = \\ &= f_e(x_B - x_A) \end{aligned} \tag{23}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} W_e^{A\to B} &= 50\,\mathrm{N}\,(1\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m}) = \\ &= 50\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{24}$$

Pertanto il lavoro totale è dato da

$$\begin{aligned} W^{A\to B} &= \underbrace{W_{peso}^{A\to B}}_{=-17.66\,\mathrm{J}} + \underbrace{W_e^{A\to B}}_{50\,\mathrm{J}} = \\ &= 32.3\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{25}$$

2. **percorso 2: arco di parabola**
Consideriamo ora l'arco di parabola $y = x^2 + b\,x + c$.

(a) Le costanti $b$ e $c$ si determinano facilmente imponendo che la retta passi per i punti:

$$\begin{cases} C = (x_C, y_C) = (0,1)\,\mathrm{m} \\ D = (x_D, y_D) = (1,5)\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{26}$$

ossia

$$\begin{cases} y_C = a x_C^2 + x_C + c \\ \\ y_D = a x_D^2 + x_D + c \end{cases} \tag{27}$$

- Dalla prima equazione, osservando che $x_C = 0$, ricaviamo subito che

$$c = 1\,\mathrm{m} \tag{28}$$

- Dalla seconda equazione ricaviamo che

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_D - x_D - c}{x_D^2} = \\ &= \frac{5\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m}}{(1\,\mathrm{m})^2} = \\ &= 3\,\mathrm{m}^{-1} \end{aligned} \tag{29}$$

e dunque

$$\begin{cases} a = 3\,\mathrm{m}^{-1} \\ c = 1\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{30}$$

Ricordando che il vertice di una parabola $y = ax^2 - bx + c$ ha coordinata $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot 3\,\mathrm{m}^{-1}} = -\frac{1}{6}\,\mathrm{m}$, il segmento di parabola è disegnato in Fig. 2.

(b) Il campo di forze (1) è lo stesso del caso precedente ed ha la componente $F_y$ diretta verso il basso, e la componente $F_x$ diretta verso destra. Pertanto il campo di forze $\vec{F}$ lungo tale segmento è schematicamente rappresentato dalle frecce disegnate in Fig. 2 lungo l'arco orientato di parabola.

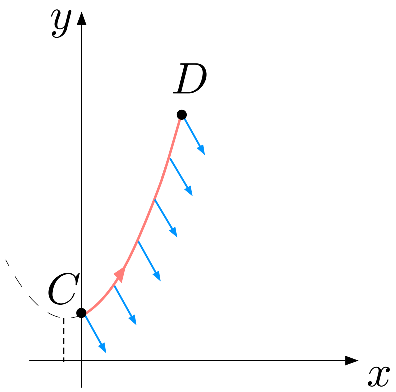


Figure 2:

(c) Il lavoro di $\vec{F}$ lungo il percorso $C \to D$ è sempre dato da

$$W^{C\to D} = \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{31}$$

Possiamo calcolarlo in tre modi:

- *modo 1*:
Sfruttiamo il fatto che il campo di forze è uniforme (=costante in tutti i punti lungo l'arco di parabola). Pertanto

$$\begin{aligned} W^{C\to D} &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \\ &= \vec{F}\cdot \underbrace{\int_A^B d\vec{r}}_{=\Delta\vec{r}=\vec{r}_D-\vec{r}_C} = \\ &= \vec{F}\cdot(\vec{r}_D-\vec{r}_C) = \\ &= (f_e\,,-mg)\cdot(x_D-x_C\,,y_D-y_C) = \\ &= f_e\,(x_D-x_C)\,-mg(y_D-y_C) \end{aligned} \tag{32}$$

**NOTA BENE:**
E' importante notare che il vettore $\vec{r}_D - \vec{r}_C$ *non* è la lunghezza dell'arco di parabola, bensì il vettore che connette direttamente C a D.

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} W^{C\to D} &= 50\,\mathrm{N}\,(1\,\mathrm{m}-0\,\mathrm{m})\;-0.9\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,(5\,\mathrm{m}-1\,\mathrm{m}) = \\ &= 50\,\mathrm{N\,m} - 35.32\,\underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}_{=\mathrm{N}} = \\ &= 14.7\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{33}$$

- *modo 2*:
  Sfruttiamo la definizione di prodotto scalare

  $$W_{C\to D} = \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C^D (F_x\,dx + F_y dy) \tag{34}$$

  Le variabili $x$ e $y$ non sono tra loro indipendenti, ma sono legate tramite l'equazione della retta:

  $$y = a\,x^2 + x + c \tag{35}$$

  In questo caso è decisamente più semplice usare $x$ come variabile indipendente.

  -dalla (35) abbiamo

  $$dy = (2a\,x\;+1)\,dx \tag{36}$$

  - gli estremi di integrazione vanno da $x_C$ a $x_D$.

  Sostituendo nella (34) otteniamo

  $$\begin{aligned} W_{C\to D} &= \int_{x_C}^{x_D} (F_x\,dx + F_y\,(2a\,x+1)\,dx) = \\ &= \int_{x_C}^{x_D} (F_x + F_y\;+2\,aF_y\,x)\;\;dx = \\ &= (F_x+F_y)\int_{x_C}^{x_D} dx + 2\,aF_y\int_{x_C}^{x_D} x\,dx = \\ &= (F_x+F_y)(x_D-x_C) + 2\,aF_y\left(\frac{x_D^2}{2}-\frac{x_C^2}{2}\right) = \\ &= (F_x+F_y)(x_D-x_C) +\;aF_y\,\left(x_D^2-x_C^2\right) = \\ &\quad [\text{sostituisco Eq.(1), (26)}] \\ &= (f_e-mg)(x_D-x_C) - a\,mg\,\left(x_D^2-x_C^2\right) \end{aligned} \tag{37}$$

  Sostituendo i valori e ricordando Eq.(30) otteniamo

  $$\begin{aligned} W^{C\to D} &= (50\,\mathrm{N}-0.9\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})\,(1\,\mathrm{m}-0\,\mathrm{m})\;-\frac{3}{\mathrm{m}}\cdot 0.9\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,(1\,\mathrm{m}^2-0\,\mathrm{m}^2) = \\ &= 41.17\,\mathrm{N\,m} - 29.49\,\underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}_{=\mathrm{N}} = \\ &= 14.7\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{38}$$

  che coincide col risultato ottenuto col primo modo.

- *modo 3* :
  Dato che la forza totale è la somma della forza peso e di quella elettrica, possiamo scomporre il lavoro nel lavoro della forza peso ed in quello della forza $\vec{f}_e$

$$W^{A\to B} = W^{A\to B}_{peso} \; + \; W^{A\to B}_{e} \tag{39}$$

  - Il lavoro della forza peso è facilmente calcolabile sfruttando il fatto che, essendo conservativa

$$\begin{aligned} W^{C\to D}_{peso} &= -\Delta E^{C\to D}_{p,peso} = \\ &= -\left(E_{p,peso}(D) - E_{p,peso}(C)\right) = \\ &= -\left(mgy_D - mgy_C\right) = \\ &= mg(y_C - y_D) \end{aligned} \tag{40}$$

    Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} W^{C\to D}_{peso} &= 0.9\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(3\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m}) = \\ &= 0.9\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(1\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m}) = \\ &= -35.32\,\underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2}}_{=\mathrm{J}} = \\ &= -35.32\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{41}$$

  - Il lavoro della forza $\vec{f}_e$ si calcola direttamente

$$\begin{aligned} W^{C\to D}_{e} &= \int_C^D \vec{f}_e \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_C^D f_e\hat{u}_x \cdot (dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y) = \\ &= \int_C^D \left( f_e\,dx\,\underbrace{\hat{u}_x\cdot\hat{u}_x}_{=1} + f_e\,dy\,\underbrace{\hat{u}_x\cdot\hat{u}_y}_{=0} \right) = \\ &= \int_{x_C}^{x_D} f_e\,dx = \\ &= f_e\int_{x_C}^{x_D} dx = \\ &= f_e(x_D - x_C) \end{aligned} \tag{42}$$

    Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} W^{C\to D}_{e} &= 50\,\mathrm{N}\,(1\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m}) = \\ &= 50\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{43}$$

  Pertanto il lavoro totale è dato da

$$\begin{aligned} W^{C\to D} &= \underbrace{W^{C\to D}_{peso}}_{=-35.32\,\mathrm{J}} + \underbrace{W^{C\to D}_{e}}_{50\,\mathrm{J}} = \\ &= 14.7\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{44}$$