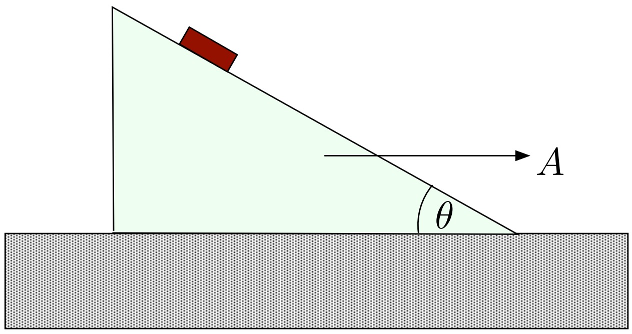
Esercizio **(tratto dal Problema 3.8 del Mazzoldi)**

Un punto materiale si trova sopra un piano inclinato di un angolo θ. Il coefficiente di attrito statico tra il punto materiale ed il piano è μ_S. Tutto il sistema avanza con un'accelerazione A e si vuole che il punto materiale sia in quiete rispetto al piano.

1. Calcolare la condizione che deve soddisfare A in funzione di θ e μ_S (si supponga che valga $\mu_S \leq \tan\theta \leq \frac{1}{\mu_S}$).

2. Studiare in particolare il caso $\mu_S = 0$ (piano liscio)

(Si consiglia di risolvere il problema nel sistema di riferimento del piano inclinato)



SOLUZIONE

1. Ci mettiamo nel sistema di riferimento del piano inclinato. Essendo accelerato rispetto al sistema inerziale del suolo, tale sistema *non* è un sistema inerziale. Pertanto, nello scrivere le leggi della dinamica, dobbiamo considerare non solo le forze reali, ma anche le forze apparenti che derivano dal fatto che il sistema non è inerziale. Scriveremo dunque

$$\vec{F} + \vec{F}^{\text{app}} = m\vec{a} \tag{1}$$

dove

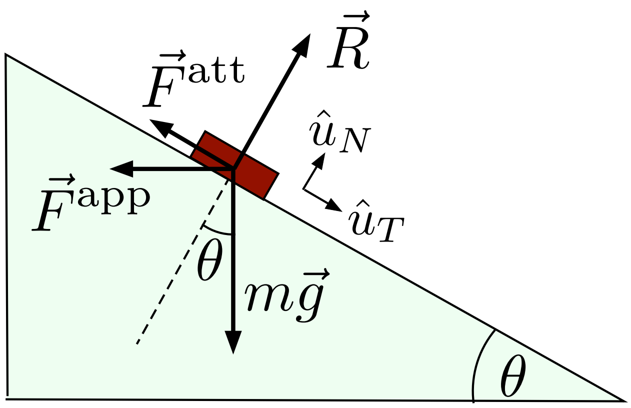
- $$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}^{\text{att}} \tag{2}$$

è la somma delle forze reali (=forza peso + reazione vincolare + attrito);

- $$\vec{F}^{\text{app}} = -m\,\vec{A} \tag{3}$$

è la forza apparente dovuta al fatto che il treno si muove con accelerazione A verso destra rispetto al suolo (si noti il segno '-' nella forza apparente);

- $\vec{a}$ è l'accelerazione del corpo di massa m nel sistema non inerziale del piano



Scomponiamo le forze e l'accelerazione in termini dei versori $\hat{u}_T$ e $\hat{u}_N$ tangenziali e ortogonali al piano inclinato. Pertanto

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \vec{F}^{\text{app}} & = & -mA\cos\theta\,\hat{u}_T - mA\sin\theta\,\hat{u}_N \\ m\vec{g} & = & mg\,\sin\theta\,\hat{u}_T - mg\cos\theta\,\hat{u}_N \\ \vec{R} & = & R\,\hat{u}_N \\ \vec{F}^{\text{att}} & = & -F^{\text{att}}\,\hat{u}_T \\ \vec{a} & = & a_T\,\hat{u}_T + a_N\,\hat{u}_N \end{array} \right. \tag{4}$$

NOTA BENE: La scelta di scrivere $\vec{F}^{\text{att}} = -F^{\text{att}}\,\hat{u}_T$ deriva dall'immaginare che la forza di attrito si opponga alla discesa del corpo lungo il piano, e che dunque sia diretta in senso opposto al versore $\hat{u}_T$ (se $F^{\text{att}} > 0$). In realtà, si comprende intuitivamente che se l'accelerazione A è molto grande, la forza apparente tenderà a far salire il corpo lungo il piano. In tal caso la forza di attrito statico che si oppone a tale risalita sarà diretta nello stesso verso di $\hat{u}_T$ (e dunque $F^{\rm att} < 0$). Pertanto, pur avendo indicato $\vec{F}^{\rm att} = -F^{\rm att}\,\hat{u}_T$, per poter contemplare entrambe le situazioni non faremo alcuna assunzione sul segno che deve assumere $F^{\rm att}$.

Inserendo la (4) nella (1) otteniamo

$$mg\,\sin\theta\,\hat{u}_T - mg\cos\theta\,\hat{u}_N + R\,\hat{u}_N - F^{\rm att}\,\hat{u}_T - mA\cos\theta\,\hat{u}_T - mA\sin\theta\,\hat{u}_N = m(a_T\,\hat{u}_T + a_N\,\hat{u}_N) \tag{5}$$

e uguagliando le componenti di $\hat{u}_x$ e le componenti di $\hat{u}_y$

$$\left\{\begin{array}{rcl} mg\sin\theta - mA\cos\theta - F^{\rm att} & = & ma_T \\ -mg\cos\theta + R - mA\sin\theta & = & ma_N \end{array}\right. \tag{6}$$

Il corpo m rimane fermo rispetto al piano quando l'accelerazione è nulla ($a_T = a_N = 0$). In tal caso l'attrito $F^{\rm att}$ è *statico* (ed è dunque un'incognita!) e le (6) si riducono a

$$\left\{\begin{array}{rcl} mg\sin\theta - mA\cos\theta - F^{\rm att} & = & 0 \\ -mg\cos\theta + R - mA\sin\theta & = & 0 \end{array}\right. \tag{7}$$

da cui otteniamo la forza di attrito e la reazione vincolare in termini di θ

$$\left\{\begin{array}{rcl} F^{\rm att} & = & mg\sin\theta - mA\cos\theta \\ R & = & mg\cos\theta + mA\sin\theta \end{array}\right. \tag{8}$$

NOTA BENE: Dalla prima delle Eq.(8) si vede che, a seconda del valore di A e dell'angolo θ, il segno di $F^{\rm att}$ può essere positivo o negativo.

2. La condizione di attrito statico può essere soddisfatta se

$$|F^{\rm att}| \leq \mu_S\,N \tag{9}$$

dove $N = |\vec{N}|$ è il modulo della forza che preme contro il piano (ossia nel verso opposto a $\hat{u}_N$). Si noti che essa è data dalla combinazione della forza peso (reale) e della forza $-m\vec{A}$ (apparente), come si vede dalla (4)

$$N \;=\; mg\cos\theta + mA\sin\theta \tag{10}$$

Pertanto la condizione (9) implica

$$-\,\mu_S\,N \leq F^{\rm att} \leq \mu_S\,N \tag{11}$$

Sostituendo la prima delle Eq.(8) e la (10) otteniamo due condizioni

(a) $F^{\rm att} \leq \mu_S\,N$ implica che

$$\begin{array}{rcl} mg\sin\theta - mA\cos\theta & \leq & \mu_S\,(mg\cos\theta + mA\sin\theta) \\ & \Downarrow & \\ g\sin\theta - \mu_S g\cos\theta & \leq & A\cos\theta + \mu_S\,A\sin\theta \\ & \Downarrow & \\ g(\tan\theta - \mu_S) & \leq & A(1 + \mu_S\tan\theta) \end{array} \tag{12}$$

Siccome il testo dice che vale $\mu_S \leq \tan\theta \rightarrow \tan\theta - \mu_S \geq 0$, ricavo che deve valere

$$A \geq g\,\frac{\tan\theta - \mu_S}{1 + \mu_S \tan\theta} \tag{13}$$

Questa condizione, a fissati valori di θ e μ_S determine il valore *minimo*

$$A \geq A_{min} \qquad\qquad A_{min} = g\,\frac{\tan\theta - \mu_S}{1 + \mu_S \tan\theta} \tag{14}$$

che l'accelerazione A deve avere affinché il corpo rimanga fermo sul piano.

(b) $-\mu_S\, N \leq F^{\rm att}$ implica che

$$\begin{aligned} -\mu_S\,(mg\cos\theta + mA\sin\theta) &\leq mg\sin\theta - mA\cos\theta \\ &\Downarrow \\ A\cos\theta - \mu_S\,A\sin\theta &\leq g\sin\theta + \mu_S g\cos\theta \\ &\Downarrow \\ A(1-\mu_S\tan\theta) &\leq g(\tan\theta + \mu_S) \end{aligned} \tag{15}$$

Siccome il testo dice che vale $\tan\theta \leq \frac{1}{\mu_S} \rightarrow 1 - \mu_S\tan\theta \geq 0$, ricavo che deve valere

$$A \leq g\,\frac{\tan\theta + \mu_S}{1 - \mu_S \tan\theta} \tag{16}$$

Questa condizione, a fissati valori di θ e μ_S determine il valore *massimo*

$$A \leq A_{max} \qquad\qquad A_{max} = g\,\frac{\tan\theta + \mu_S}{1 - \mu_S \tan\theta} \tag{17}$$

che l'accelerazione A deve avere affinché il corpo rimanga fermo sul piano.

Pertanto, affinché il corpo rimanga fermo sul piano, l'accelerazione A deve soddisfare

$$\begin{aligned} A_{min} \leq \quad & A \quad \leq A_{max} \\ & \Downarrow \\ g\,\frac{\tan\theta - \mu_S}{1 + \mu_S \tan\theta} \leq \quad & A \quad \leq g\,\frac{\tan\theta + \mu_S}{1 - \mu_S \tan\theta} \end{aligned} \tag{18}$$

3. Nel caso particolare di piano liscio ($\mu_S = 0$), i valori A_{min} [vedi (14)] e A_{max} [vedi (17)] coincidono

$$A_{min} = A_{max} = A^* = g\,\tan\theta \tag{19}$$

e dalla (18) otteniamo che il corpo rimane fermo solo se l'accelerazione A vale esattamente

$$A = A^* = g\,\tan\theta \tag{20}$$

4. Se l'accelerazione A non rientra nell'intervallo (18), il corpo non rimane fermo sul piano e l'attrito diventa dinamico. In particolare

$$\begin{cases} \text{se } A < A_{min} & \rightarrow \quad \text{il corpo scende} \\ \\ \text{se } A > A_{max} & \rightarrow \quad \text{il corpo sale} \end{cases} \tag{21}$$