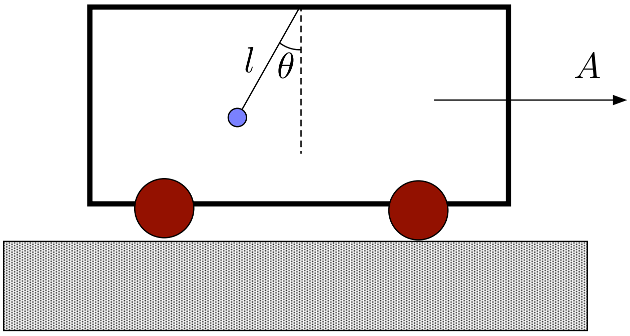
Esercizio (tratto dal Problema 3.6 del Mazzoldi)

Un pendolo semplice ($l = 0.4\,\mathrm{m}$) è appeso al supporto di un vagone di un treno che avanza con accelerazione $A = 5\,\mathrm{m/s^2}$. Calcolare:

1. l'angolo θ di equilibrio rispetto alla verticale;
2. il periodo delle piccole oscillazioni rispetto alla posizione di equilibrio



SOLUZIONE

DATI NOTI

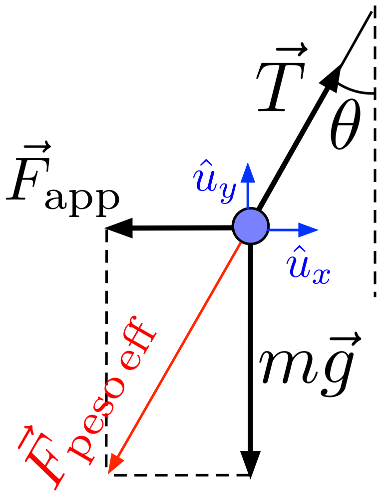
$$\begin{aligned} A &= 5\,\mathrm{m/s^2} \\ l &= 0.4\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

1. Ci mettiamo nel sistema di riferimento del treno. Essendo accelerato rispetto al sistema inerziale del suolo, il treno *non* è un sistema inerziale. Pertanto, nello scrivere le leggi della dinamica, dobbiamo considerare non solo le forze reali, ma anche le forze apparenti che derivano dal fatto che il sistema non è inerziale. Scriveremo dunque

$$\vec{F} + \vec{F}_{\rm app} = m\vec{a} \tag{1}$$

dove

- $\vec{F}$ è la somma delle forze reali (=forza peso + tensione del filo);
- $$\vec{F}_{\rm app} = -m\,\vec{A} \tag{2}$$
  è la forza apparente dovuta al fatto che il treno si muove con accelerazione A verso destra rispetto al suolo (si noti il segno '-' nella forza apparente);
- $\vec{a}$ è l'accelerazione del corpo di massa m del pendolo nel sistema non inerziale del treno



Le forze reali che compaiono nella (11) si scrivono

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} \tag{3}$$

e, indicando con θ l'angolo lungo la verticale e con T il modulo della tensione $\vec{T}$ del filo, possiamo scrivere

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m\vec{g} &=& -mg\,\hat{u}_y \\ \vec{T} &=& T\sin\theta\,\hat{u}_x + T\cos\theta\,\hat{u}_y \end{array} \right. \tag{4}$$

Inserendo la (2) e le (3)-(4) nella (11) otteniamo

$$- mg\,\hat{u}_y + T\sin\theta\,\hat{u}_x \;+\; T\cos\theta\,\hat{u}_y - mA\,\vec{u}_x = m(a_x\,\hat{u}_x + a_y\,\hat{u}_y) \tag{5}$$

e uguagliando le componenti di $\hat{u}_x$ e le componenti di $\hat{u}_y$

$$\begin{cases} T\sin\theta - mA &= ma_x \\ -mg + T\cos\theta &= ma_y \end{cases} \tag{6}$$

2. La condizione di equilibrio si ha quando l'accelerazione è nulla ($a_x = a_y = 0$). In tal caso le (6) si riducono a

$$\begin{cases} T\sin\theta - mA &= 0 \\ -mg + T\cos\theta &= 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} T\sin\theta &= mA \\ T\cos\theta &= mg \end{cases} \tag{7}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} T &= m\sqrt{g^2 + A^2} \\ \\ \tan\theta &= \frac{A}{g} \end{cases} \tag{8}$$

Pertanto l'angolo di equilibrio vale

$$\theta = \arctan\frac{A}{g} \tag{9}$$

Sostituendo i valori

$$\theta \;=\; \arctan\frac{5\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}}{9.81\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}} = 0.47 \tag{10}$$

3. Per determinare le oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio, osserviamo che nel sistema non inerziale del treno, tutto avviene come se ci fosse una forza di gravità efficace $\vec{F}_{\mathrm{peso\,eff}}$ diretta in maniera obliqua, dovuta alla somma (vettoriale!) della forza reale di gravità $m\vec{g}$ e dalla forza apparente $\vec{F}_{\mathrm{app}} = -m\vec{A}$

$$\vec{T} + \underbrace{m\vec{g} + \vec{F}_{\mathrm{app}}}_{\vec{F}_{\mathrm{peso\,eff}}} \;=\; m\vec{a} \tag{11}$$

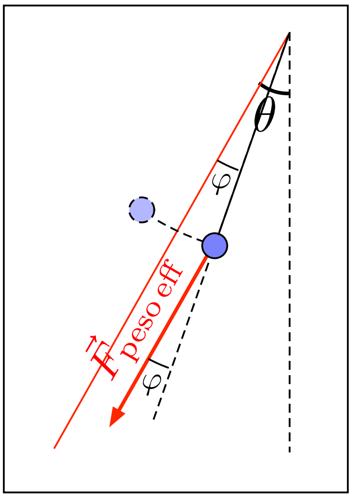
con $\vec{F}_{\mathrm{app}} = -m\vec{A}$ e

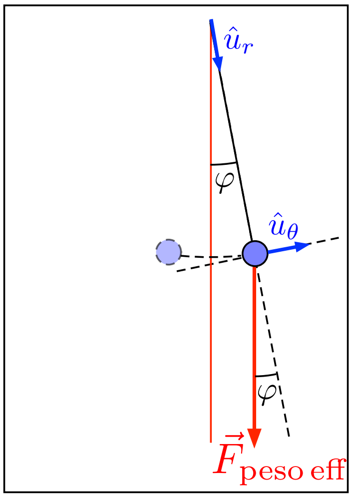
$$\vec{F}_{\mathrm{peso\,eff}} = m\vec{g}_{eff} = m\vec{g} - m\vec{A} \tag{12}$$

di modulo pari a

$$|\vec{F}_{\mathrm{peso\,eff}}| = mg_{eff} = m\sqrt{g^2 + A^2} \tag{13}$$

Guardando allora il problema in un sistema di assi ruotato dell'angolo θ, la direzione di equilibrio (9) diventa verticale, e il problema è dunque uguale a quello di un pendolo semplice, soggetto ad una forza di gravità efficace. Il pendolo oscilla dunque attorno alla posizione di equilibrio 'obliqua'. Denotiamo con φ lo scostamento angolare dalla posizione di equilibrio θ





(=la verticale nel sistema ruotato). Possiamo scomporre la forza peso efficace rispetto ai versori radiale $\hat{u}_r$ e $\hat{u}_\theta$

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{peso eff}} + \vec{T} &= m\vec{a} \\
&\Downarrow \\
(mg_{eff}\cos\varphi - T)\hat{u}_r - mg_{eff}\sin\varphi\,\hat{u}_\theta &= ma_r\hat{u}_r + ma_\theta\hat{u}_\theta \\
&\Downarrow \\
(mg_{eff}\cos\varphi - T)\hat{u}_r - mg_{eff}\sin\varphi\,\hat{u}_\theta &= -ml\underbrace{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}_{=\omega^2}\hat{u}_r + ml\underbrace{\frac{d^2\varphi}{dt^2}}_{=\alpha}\hat{u}_\theta
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Uguagliando le componenti omologhe

$$
\left\{
\begin{aligned}
mg_{eff}\cos\varphi - T &= -ml\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\
-mg_{eff}\sin\varphi &= ml\frac{d^2\varphi}{dt^2}
\end{aligned}
\right.
\tag{15}
$$

La prima equazione ci dà il valore della tensione

$$
T = m\left(g_{eff}\cos\varphi + l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) \tag{16}
$$

mentre la seconda è un'equazione differenziale per l'angolo $\varphi(t)$

$$
\begin{aligned}
m\,l^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -\,ml\,g_{eff}\sin\varphi \\
&\Downarrow \quad \text{[semplifico per } m\,l \text{ e uso la (13)]} \\
l\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -\sqrt{g^2+A^2}\sin\varphi \qquad (17) \\
&\Downarrow \\
\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -\frac{\sqrt{g^2+A^2}}{l}\sin\varphi \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Per piccoli oscillazioni approssimiamo

$$\sin\varphi \simeq \varphi \tag{19}$$

e la (18) si riduce a

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\sqrt{g^2 + A^2}}{l}\varphi \tag{20}$$

che è l'equazione delle piccoli oscillazioni di un pendolo

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\Omega^2\varphi \tag{21}$$

con pulsazione

$$\Omega = \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + A^2}}{l}} \tag{22}$$

e periodo

$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + A^2}}} \tag{23}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} T_{osc} &= 2\pi\sqrt{\frac{0.4\,\cancel{\mathrm{m}}}{\sqrt{9.81^2\,\frac{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}{\mathrm{s}^4} + 5^2\,\frac{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}{\mathrm{s}^4}}}} = \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{11.2}\,\mathrm{s}^2} = \\ &= 1.2\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{24}$$