

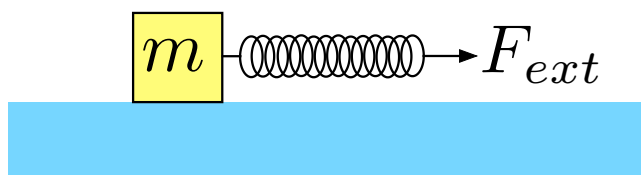
Esercizio (tratto dal Problema 3.9 del Mazzoldi 2)

Ad una massa $m = 3 \text{ kg}$, posta su un piano orizzontale scabro, è collegata una molla di costante elastica $k = 640 \text{ N/m}$ e massa trascurabile, all'estremo della quale agisce parallelamente al piano una forza $F_{ext} = 16 \text{ N}$ diretta verso destra. Si osserva che il sistema è in quiete.

1. Di quanto è allungata la molla?
2. quanto vale la forza di attrito statico tra la massa ed il piano?
3. cosa si può dedurre sul coefficiente di attrito statico μ_S tra massa e piano?

Supponiamo invece di osservare che la massa m si muova, e che il coefficiente di attrito dinamico sia $\mu_D = 0.5$. Calcolare:

4. l'accelerazione;
5. l'allungamento della molla



SOLUZIONE

DATI NOTI

$$\begin{aligned} k &= 640 \text{ N/m} \\ F_{ext} &= 16 \text{ N} \end{aligned}$$

Consideriamo la situazione in cui il sistema è in quiete.

1. Indichiamo con C l'estremo destro della molla. Su di esso agiscono la forza esterna applicata F_{ext} (verso destra) e la forza elastica F_{el} di richiamo della molla stessa (verso sinistra). Siccome C è in quiete si ha

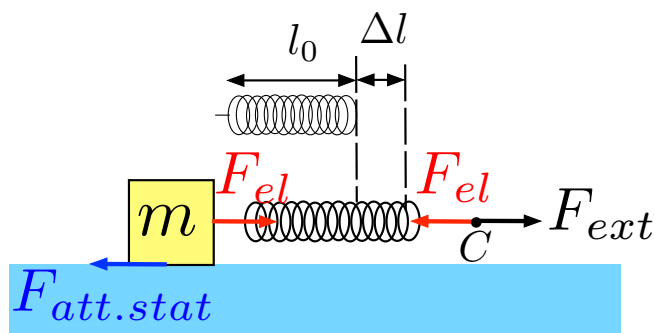
$$F_{ext} + F_{el} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{el} = -F_{ext} \quad (1)$$

dove la forza elastica della molla è data dall'allungamento Δl rispetto alla lunghezza di equilibrio l_0 .

$$\begin{aligned} F_{el} &= -k \Delta l \\ \Rightarrow \Delta l &= -\frac{F_{el}}{k} = \frac{F_{ext}}{k} \end{aligned} \quad (2)$$

Sostituendo i dati, otteniamo

$$\Delta l = \frac{16 \text{ N}}{640 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0.025 \text{ m} \quad (3)$$



NB: quando la lunghezza della molla è pari alla lunghezza di riposo l_0 , essa **NON** esercita alcuna forza, quando essa viene allungata di Δl rispetto a l_0 , essa esercita una forza $F_{el} = -k\Delta l$

2. Sul corpo m agiscono la forza elastica F_{el} della molla (verso destra) e la forza di attrito statico esercitata dal piano. Siccome m è in quiete, la somma di tali forze è nulla.

$$F_{el} + F_{att.stat} = 0 \quad (4)$$

ossia

$$F_{att.stat} = -F_{el} = -16 \text{ N} \quad (\text{diretta verso sinistra}) \quad (5)$$

ATTENZIONE: un tipico errore è quello di scrivere che la forza di attrito statico è pari a $\mu_S mg \cos \theta = \mu_S mg$. Ma tale valore corrisponde solo alla forza di attrito massimo. Pertanto

$$F_{att.stat} \neq \mu_S mg \cos \theta$$

Si ha invece che

$$0 \leq |F_{att.stat}| \leq F_{att.stat}^{max} = \mu_S mg \cos \theta$$

3. Siccome la massa m è ferma, la forza di attrito statico è minore della forza di attrito massima che il piano può esercitare

$$\begin{aligned} |F_{att.stat}| &\leq F_{att.stat}^{max} \\ &\Downarrow \\ |F_{att.stat}| &\leq \mu_S mg \cos \theta = \mu_S mg \end{aligned} \quad (6)$$

Peratnto possiamo dedurre che

$$\mu_S \geq \frac{|F_{att.stat}|}{mg} \quad (7)$$

Sostituendo i dati

$$\mu_S \geq \frac{16 \text{ N}}{3 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{16 \text{ N}}{29.43 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}} = 0.54 \quad (8)$$

Supponiamo ora di osservare che la massa m sia in movimento.

4. Il punto C della molla è ora in movimento. Tuttavia l'elemento C (così come tutta la molla) ha una massa trascurabile. Pertanto, applicando $F = ma$ all'elemento C (con $m = 0$) si ricava che la risultante delle forze che agiscono su C è comunque nulla. Continua pertanto a valere che

$$F_{ext} = F_{el} \quad (9)$$

ossia la forza elastica è immutata rispetto al caso di quiete. L'allungamento è pure rimasto immutato:

$$F_{el} = -k \Delta l \quad \Rightarrow \Delta l = \frac{|F_{el}|}{k} = 0.025 \text{ m} \quad (10)$$

5. Sulla massa m in movimento, d'altra parte, oltre alla forza elastica F_{el} , si esercita ora una forza di attrito *dinamico* pari a

$$F_{att.din} = -\mu_D mg \underbrace{\cos \theta}_{=1} \quad (\text{diretta verso sinistra}) \quad (11)$$

Pertanto l'equazione della dinamica diventa

$$\begin{aligned} F_{el} + F_{att.din.} &= ma \\ \Rightarrow a &= \frac{F_{el}}{m} - \mu_D g = \frac{F_{ext}}{m} - \mu_D g \end{aligned} \quad (12)$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{16 \text{ N}}{3 \text{ kg}} - 0.5 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &\quad [\text{uso } \text{N} = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2] \\ &= 5.333 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 4.905 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 0.43 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned} \quad (13)$$