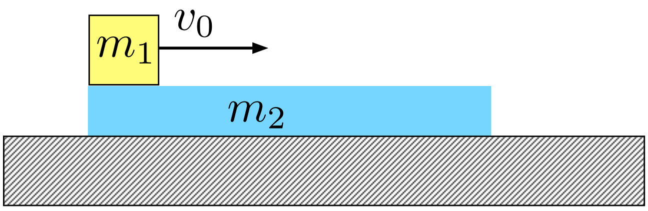
Esercizio (tratto dal Problema 2.14 del Mazzoldi)

Su un ripiano orizzontale è appoggiata una piastra di massa m_2 ferma. Il coefficiente di attrito dinamico piastra-piano è μ_{D2}. Sulla piastra viene posto un corpo di massa m_1, a cui viene impressa una velocità iniziale v_0 orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico corpo-piastra è μ_{D1}.

1. Che relazione deve esistere tra m_1, m_2 μ_{D1}, μ_{D2} e v_0 affiché la piastra risulti in movimento ?

Posto $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$, $\mu_{D1} = 0.6$, $\mu_{D2} = 0.2$, $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$, si determini:

2. la distanza Δx percorsa dal corpo m_1 rispetto alla piastra prima di fermarsi;
3. la distanza d percorsa dalla piastra m_2 sul ripiano prima di fermarsi;



SOLUZIONE

DATI NOTI

$$\begin{aligned} m_1 &= 2\,\text{kg} \\ m_2 &= 3\,\text{kg} \\ \mu_{D1} &= 0.6 \\ \mu_{D2} &= 0.2 \\ v_0 &= 3\,\text{m/s} \end{aligned}$$

Descrizione:
Il corpo m_1 parte con una velocità iniziale v_0, mentre la piastra è inizialmente ferma. Grazie all'attrito (dinamico) tra corpo e piastra, il corpo m_1 cerca di trascinare in avanti con sé la piastra. Al tempo stesso, però, la piastra è appoggiata sul piano che pure esercita una forza di attrito cercando di trattenere la piastra dal muoversi. Possono verificarsi due situazioni:

1. la forza di attrito dinamico che m_1 esercita sulla piastra non prevale su quella di attrito statico piastra-piano: la piastra rimane ferma.

2. la forza di attrito dinamico che m_1 esercita sulla piastra prevale su quella di attrito statico piastra-piano, la lastra si mette in movimento. Da quel punto in poi il piano esercita una forza di attrito *dinamico* sulla piastra che è *inferiore* a quella di attrito statico massimo che eserciterebbe sulla lastra nel caso in cui rimanesse ferma (dato che $\mu_{D2} < \mu_{S2}$).

Il problema ci chiede di analizzare questo secondo caso. La piastra risulta dunque in movimento. Notiamo anche che il corpo m_1, che inizialmente ha una velocità superiore a quella della piastra, rallenta a causa della forza d'attrito (dinamico) che la piastra esercita su di esso frenandolo (per il terzo principio tali forze di attrito sono uguali ed opposte). Ad un certo istante (che indichiamo con t^*) le due velocità diventano uguali, e dunque il corpo m_1 si ferma rispetto alla piastra, non trascinandola più in avanti. Da tale istante in poi il sistema diventa un unico corpo che prosegue solidalmente il moto, rallentando gradualmente fino ad arrestarsi a causa della forza di attrito esercitata dal piano. Dividiamo dunque il moto in due fasi:

1. **fase 1:** $0 \leq t \leq t^*$ (m_1 è in moto rispetto alla piastra).

   (a) Scriviamo la seconda legge della dinamica per ciascuno dei due corpi.

   - Sul corpo m_1 agisce la forza di attrito *dinamico* dovuta alla piastra che lo frena:

   $$F^{din}_{att,2\to1} = -\mu_{D1} m_1 g \qquad \text{(diretta verso sinistra)} \tag{1}$$

   - Sul corpo m_2 agiscono due forze. Per il terzo principio agisce una forza

   $$F^{din}_{att,1\to2} = -F^{din}_{att,2\to1} = +\mu_{D1} m_1 g \qquad \text{(diretta verso destra)} \tag{2}$$

   oltre che la forza di attrito dovuta al ripiano. Siccome si suppone che la piastra sia in movimento, anche quest'ultima è una forza di attrito dinamico.

   Pertanto:

   $$\text{per } m_1) \qquad -\mu_{D1} m_1 g = m_1 a_1 \tag{3}$$

   $$\text{per } m_2) \qquad +\mu_{D1} m_1 g - \mu_{D2}(m_1 + m_2) g = m_2 a_2 \tag{4}$$

La condizione che la piastra m_2 sia in movimento è rappresentata da $a_2 > 0$. Pertanto dalla (4) abbiamo

$$\begin{aligned} \mu_{D1} m_1 g - \mu_{D2}(m_1+m_2) g &> 0 \\ \mu_{D1} m_1 &> \mu_{D2}(m_1+m_2) \end{aligned} \tag{5}$$

ossia

$$\mu_{D1} > \mu_{D2}(1+\frac{m_2}{m_1}) \tag{6}$$

Sostituendo i valori, controlliamo se, nel caso in questione, essa è soddisfatta

$$\begin{aligned} 0.6 &> 0.2\,(1+\frac{3\,\mathrm{kg}}{2\,\mathrm{kg}}) \qquad ? \\ &\Downarrow \\ 0.6 &> 0.2 \cdot 2.5 \qquad ? \\ &\Downarrow \\ 0.6 &> 0.5 \qquad OK! \end{aligned} \tag{7}$$

(b) Dalla (4) ricaviamo

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= -\mu_{D1} g \\ a_2 &= \left(\mu_{D1} \frac{m_1}{m_2} - \mu_{D2} \frac{m_1+m_2}{m_2} \right) g \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= -0.6 \cdot 9.81 \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = -5.89 \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ a_2 &= \left(0.6 \cdot \frac{2\,\cancel{\mathrm{kg}}}{3\,\cancel{\mathrm{kg}}} - 0.2 \cdot \frac{2\,\cancel{\mathrm{kg}} + 3\,\cancel{\mathrm{kg}}}{3\,\cancel{\mathrm{kg}}} \right) \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.65 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Siccome a_1 e a_2 sono costanti, i moti di m_1 e m_2 sono uniformemente accelerati. Possiamo dunque scrivere le loro leggi orarie, tenendo conto che le posizioni iniziali di m_1 e m_2 sono uguali e pari all'origine $x = 0$, mentre le velocità iniziali sono v_0 e 0, rispettivamente

$$\left\{ \begin{aligned} x_1(t) &= v_0 t + \tfrac{a_1}{2} t^2 \\ x_2(t) &= + \tfrac{a_2}{2} t^2 \end{aligned} \right. \qquad 0 \le t \le t^* \tag{10}$$

da cui le leggi orarie delle velocità

$$\left\{ \begin{aligned} v_1(t) &= \tfrac{dx_1}{dt} = v_0 + a_1 t \\ v_2(t) &= \tfrac{dx_2}{dt} = a_2 t \end{aligned} \right. \qquad 0 \le t \le t^* \tag{11}$$

L'istante t^*, per definizione, è l'istante al quale le due velocità coincidono (ossia m_1 si ferma rispetto alla piastra)

$$\begin{aligned} v_1(t^*) &= v_2(t^*) \\ &\Downarrow \\ v_0 + a_1 t^* &= a_2 t^* \end{aligned} \tag{12}$$

da cui ricaviamo

$$t^* = \frac{v_0}{a_2 - a_1} \tag{13}$$

Sostituendo i dati si ottiene

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0.65\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - (-5.89\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}))} = \\ &= \frac{3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{6.54\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 0.46\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{14}$$

(c) Sostituendo ora il tempo (13) nelle leggi orarie (10), troviamo la distanza relativa che m_1 ha percorso rispetto alla piastra, data da

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_1(t^*) - x_2(t^*) = \\ &= v_0 t^* + \frac{a_1}{2} t^{*2} - \frac{a_2}{2} t^{*2} = \\ &= t^* \left(v_0 + \frac{a_1 - a_2}{2} t^* \right) = \\ &\quad [\text{uso (13)}] \\ &= \frac{v_0}{a_2 - a_1} \left(v_0 + \frac{a_1 - a_2}{2} \frac{v_0}{a_2 - a_1} \right) \\ &= \frac{v_0}{a_2 - a_1} \left(v_0 - \frac{v_0}{2} \right) \end{aligned} \tag{15}$$

da cui

$$\Delta x = \frac{v_0^2}{2(a_2 - a_1)} \tag{16}$$

Sostituendo ora i valori (9) in (16) otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{(3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2 \cdot (0.65\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - (-5.89\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}))} = \\ &= \frac{9\,\frac{\mathrm{m}^2}{\cancel{\mathrm{s}^2}}}{2 \cdot 6.54\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}} = \\ &= 0.689\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{17}$$

(d) la velocità $v^* = v_1(t^*) = v_2(t^*)$ si ricava dalla (12)

$$\begin{aligned} v^* &= a_2 t^* = a_2\, \frac{v_0}{a_2 - a_1} = \\ &= v_0\, \frac{1}{1 - \frac{a_1}{a_2}} \end{aligned} \tag{18}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{aligned} v^* &= 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\, \frac{1}{1 - \frac{-5.89\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0.65\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \\ &= 3\, \frac{1}{10.061}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= 0.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{19}$$

2. **fase 2:** $t^* \leq t_f$ (m_1 è fermo rispetto alla piastra).

   (a) In questa fase il corpo m_1 è *fermo* rispetto alla piastra. Pertanto tra essi si esercita una forza di attrito *statico* F_{att}^{stat}. Rispetto al piano essi si muovono con la stessa accelerazione a'. Scrivendo le equazioni della dinamica abbiamo

$$\text{per } m_1) \qquad -F_{att}^{stat} = m_1 a' \tag{20}$$

$$\text{per } m_2) \qquad +F_{att}^{stat} - \mu_{D2}(m_1+m_2)g = m_2 a' \tag{21}$$

   Sostituendo F_{att}^{stat}, ricavato dalla prima equazione (20) nella seconda equazione (21), otteniamo

$$-m_1 a' - \mu_{D2}(m_1+m_2)g = m_2 a' \tag{22}$$

   ossia:

$$-\mu_{D2}(m_1+m_2)g = (m_1+m_2)a' \tag{23}$$

   L'equazione (23) è di fatto l'equazione per un *unico* corpo di massa m_1+m_2, che si muove soggetto all'attrico dinamico dovuto al piano, ossia con accelerazione

$$\begin{aligned} a' &= -\mu_{D2} g = \\ &= -0.2 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = -1.96 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{24}$$

   NOTA BENE: Mentre nella fase 1 la forza di attrito tra m_1 e m_2 è dinamico, e vale in modulo da $|F_{att}^{din}| = \mu_{D1} g m_1$ (con μ_{D1} che indica il coefficiente di attrito *dinamico*), nella fase 2 la forza di attrito tra m_1 e m_2 è *statico* ed un'incognita! **Il suo modulo NON è semplicemente dato da** $|F_{att}^{stat}| = \mu_{D1}^{stat} g m_1$ (con μ_{D1}^{stat} che indica il coefficiente di attrito *statico*). Infatti, sostituendo il valore (24) appena trovato per l'accelerazione a' nella (20), si ottiene

$$|F_{att}^{stat}| = \mu_{D2} m_1 g \neq \mu_{D1}^{stat} g m_1 \tag{25}$$

   (b) Trattandosi di un moto uniformemente accelerato, la velocità varia con la legge oraria

$$v(t) = v^* + a'(t - t^*) \qquad t^* \leq t \leq t_f \tag{26}$$

   e dunque l'istante t_f di arresto della piastra è dato da

$$\begin{aligned} v(t_f) &= 0 \\ v^* + a'(t_f - t^*) &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

   da cui otteniamo

$$t_f = t^* - \frac{v^*}{a'} \tag{28}$$

   Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} t_f &= 0.46\,\mathrm{s} - \frac{0.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{-1.96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 0.613\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{29}$$

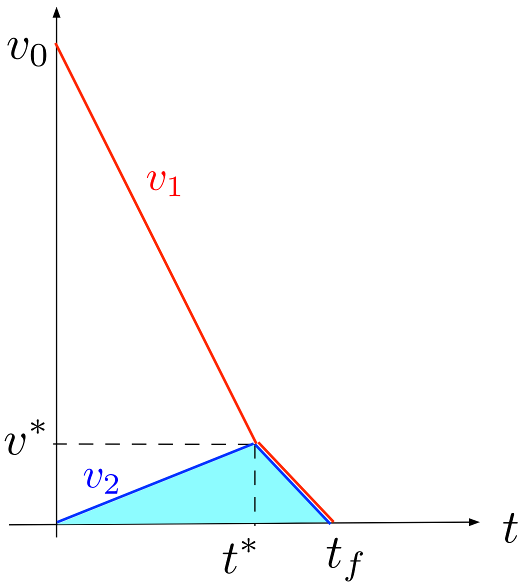


Figure 1: Legge oraria della piastra (curva blu) e del corpo (curva rossa) [vedi Eq.(11) e (26)].

(c) In Fig.1 è descritto l'andamento nel tempo delle velocità v_1 e v_2 dei due corpi (diverse fino a t^* e uguali tra loro dopo t^*). In particolare, per la piastra [vedi la seconda delle Eq.(11) e l'Eq.(26)] lo spazio percorso complessivamente è dato dall'area sottesa dal triangolo, ossia

$$d = \frac{t_f \cdot v^*}{2} \tag{30}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$d = \frac{0.613 \cancel{s} \cdot 0.3 \frac{\mathrm{m}}{\cancel{s}}}{2} = 0.092\,\mathrm{m} \tag{31}$$