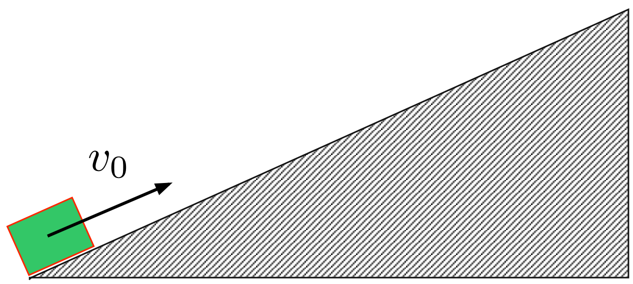
Esercizio (tratto dal Problema 3.35 del Mazzoldi 2)

Un corpo sale lungo un piano inclinato ($\theta = 18^o$) scabro ($\mu_S = 0.35$, $\mu_D = 0.25$), partendo dalla base con velocità $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ e diretta parallelamente al piano inclinato.

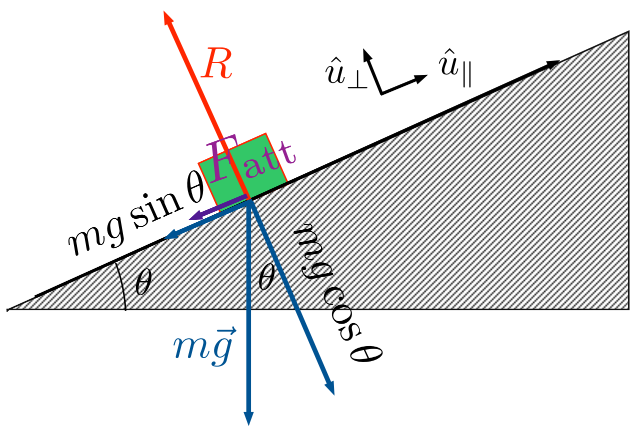
1. Calcolare la distanza l che percorre lungo il piano prima di arrestarsi;
2. Calcolare dopo quanto tempo si ferma;
3. Stabilire se, una volta che si ferma, torna indietro o rimane fermo
4. Nel primo caso calcolare quanto tempo impiega per raggiungere nuovamente la posizione iniziale



SOLUZIONE:

Dati noti:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 10\,\mathrm{m/s} \\ \theta & = & \frac{\pi}{10} \\ \mu_S & = & 0.35 \\ \mu_D & = & 0.25 \end{array}} \tag{1}$$



Scegliamo anzitutto i versori $\hat{u}_\parallel$ per la direzione longitudinale al piano e $\hat{u}_\perp$ è per la direzione ortogonale uscente, come mostrato in figura.

1. Consideriamo anzitutto il tratto di moto dalla base del piano inclinato al punto in cui si ferma. Dobbiamo calcolare la distanza l che percorre lungo il piano prima di arrestarsi.

   - Le forze che agiscono sul corpo sono:
     - forza peso $\vec{P}$;
     - forza di attrito $\vec{F}_{\rm att}$;
     - reazione vincolare $\vec{R}$ del piano.
   - Dalla seconda legge della dinamica abbiamo
   $$\vec{F} = m\,\vec{a} \tag{2}$$
   dove
   $$\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{\rm att} + \vec{R} \tag{3}$$
   è la forza totale che agisce sul corpo.
   - Scomponiamo ciascuno di questi vettori (le tre forze e l'accelerazione $\vec{a}$) nelle direzioni longitudinale e ortogonale al piano. In tal modo la legge vettoriale (2) della dinamica diventa
   $$F_\parallel\,\hat{u}_\parallel + F_\perp\,\hat{u}_\perp = m\,(a\,\hat{u}_\parallel + 0\,\hat{u}_\perp) \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_\parallel = m\,a \\ F_\perp = 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

dove l'accelerazione $\vec{a} = a\,\hat{u}_{||}$ ha solo componente longitudinale dato che il moto avviene lungo il piano. Vediamo direzione per direzione:

- direzione $\hat{u}_{\perp}$ ortogonale al piano
  * componente ortogonale della forza peso,

    $P_{\perp} = -mg\cos\theta$ (il segno '-' perché è diretta verso il basso)

  * reazione vincolare del piano. E' un'incognita che indichiamo con R.
  * accelerazione: il corpo non penetra ortogonalmente al piano, ma si muove solo lungo la sua direzione longitudinale. Ciò significa che, rispetto alla direzione ortogonale al piano, il corpo rimane *sempre* fermo, e dunque

    $$a_{\perp} = 0 \tag{5}$$

    Dalla componente $\hat{u}_{\perp}$ dell'equazione della dinamica (4) ricaviamo dunque che la reazione vincolare del piano cancella esattamente la componente della forza peso ortogonale.

    $$\boxed{F_{\perp} = P_{\perp} + R = m\underbrace{a_{\perp}}_{=0}} \quad \rightarrow \quad R = -P_{\perp} = +mg\cos\theta \tag{6}$$

- direzione $\hat{u}_{||}$ longitudinale al piano
  * componente longitudinale della forza peso,

    $P_{||} = -mg\sin\theta$ (il segno '-' perché è diretta verso il basso)

  * forza di attrito dinamico,

    $F_{\text{att}} = -\mu_D\,|P_{\perp}| = -\mu_D\,mg\cos\theta$
    (il segno '-' perché si oppone al moto che, in *questa* fase, è verso l'alto)

  E dunque la componente longitudinale della seconda legge della dinamica è

  $$\boxed{F_{||} = -mg\sin\theta - \mu_D mg\cos\theta = m\,a} \tag{7}$$

NOTA BENE: Un tipico errore è quello di scrivere le componenti longitudinali e ortogonali come $m\vec{g}\sin\theta$ e $m\vec{g}\cos\theta$. E' un errore grave perché mostra delle lacune sulle nozioni elementari del calcolo vettoriale. Infatti un vettore $m\vec{g}\sin\theta$ ha la stessa direzione del vettore $m\vec{g}$ ed è dunque sempre diretto verso il basso.

- *Siccome le forze longitudinali sono costanti*, anche l'accelerazione longitudinale è costante, e vale precisamente

$$a = \frac{F_{||}}{m} = -g\,(\sin\theta + \mu_D\cos\theta) \tag{8}$$

(il segno '-' indica che è diretta verso il basso) e dunque il moto longitudinale è un moto uniformemente accelerato con accelerazione (=decelerazione) data da (8).

- Per determinare lo spazio percorso possiamo applicare allora la formula

$$l = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} \tag{9}$$

valida solo per un moto uniformemente accelerato, che collega lo spazio percorso $l = s(t_2) - s(t_1)$ tra due generici istanti t_1 e t_2 alle velocità in tali istanti. In particolare scegliamo:

  - come istante t_1 l'istante iniziale in cui parte dalla base (ed ha velocità v_1 pari a $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$);
  - come istante t_2 l'istante finale in cui il corpo si arresta (ed ha velocità $v_2 = 0\,\mathrm{m/s}$);

Pertanto lo spazio percorso (longitudinalmente) dalla base del piano vale

$$\begin{aligned} l &= \frac{(0\,\mathrm{m/s})^2 - v_0^2}{2\,a} \\ &= -\frac{v_0^2}{2\,a} = \\ &\quad [\text{uso la (8)}] \\ &= \frac{-v_0^2}{-2\,g\,(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)} \end{aligned}$$

e dunque

$$l = \frac{v_0^2}{2\,g\,(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)} \tag{10}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} l &= \frac{100\,\frac{\mathrm{m}^2}{\cancel{\mathrm{s}}^2}}{2\,\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}^2}(\sin\frac{\pi}{10} + 0.25\cos\frac{\pi}{10})} = \\ &= \frac{5.097}{0.309 + 0.25\,\cdot 0.951}\,\mathrm{m} = \\ &= 9.32\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{11}$$

Questa distanza longitudinale corrisponde ad un'altezza verticale rispetto al suolo

$$\begin{aligned} h &= l\,\sin\theta = \\ &= 9.32\,\mathrm{m}\,\sin\frac{\pi}{10} = \\ &= 2.88\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{12}$$

Osservazione
Avremmo potuto calcolare la distanza l anche in un altro modo, usando il teorema di variazione dell'energia meccanica. Considerando come A la posizione iniziale alla base del piano inclinato e come B il punto finale in cui si arresta, applichiamo il teorema di variazione dell'energia meccanica:

$$\underbrace{\Delta E_m^{A\to B}}_{E_m(B)-E_m(A)} = W_{\text{att}}^{A\to B} \tag{13}$$

dove:

- in A il corpo ha energia potenziale nulla perché si trova al suolo:

$$E_m(A) = \underbrace{\frac{1}{m}v_0^2}_{E_k(A)} + \underbrace{0}_{E_p(A)} \tag{14}$$

- in B ha energia cinetica nulla perché si arresta:

$$E_m(B) = \underbrace{0}_{E_k(B)} + \underbrace{mgh}_{E_p(B)} \tag{15}$$

  dove l'altezza finale è legata alla lunghezza percorsa lungo il piano dalla relazione

$$h \;\; = \;\; l\,\sin\theta \tag{16}$$

  per cui

$$E_m(B) = mgl\,\sin\theta \tag{17}$$

- Il lavoro della forza di attrito dinamico è dato da

$$W_{\text{att}}^{A\to B} = \underbrace{\vec{F}_{\text{att}}\cdot\Delta\vec{r}}_{\text{discordi}} = -|\vec{F}_{\text{att}}|\;\underbrace{|\Delta\vec{r}|}_{=l} \tag{18}$$

  e

$$F_{\text{att}} \;\; = \;\; -\mu_D P_\perp = -\mu_D mg\cos\theta \tag{19}$$

  dove $P_\perp$ è la componente ortogonale della forza peso (cioè la componente che 'preme' sul piano). Dunque

$$W_{\text{att}}^{A\to B} = -\mu_D mg\cos\theta\, l \tag{20}$$

Sostituendo le Eq.(14), (17) e (20) in (13) otteniamo

$$\begin{aligned} mgl\sin\theta - \frac{1}{2}mv_0^2 \;\; &= \;\; -\mu_D mg\cos\theta\, l \\ {\scriptstyle [\text{semplifico per } m]} \;\; &\Downarrow \\ l\,g\,(\sin\theta + \mu_D\cos\theta) \;\; &= \;\; \frac{1}{2}v_0^2 \end{aligned} \tag{21}$$

da cui

$$l = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)} \qquad (22)$$

che coincide col risultato (10) trovato prima.

2. Per determinare il tempo che impiega a raggiungere la cima sfruttiamo nuovamente una delle proprietà del moto uniformemente accelerato, ossia il fatto che la velocità varia linearmente nel tempo

$$v(t) = v_0 + at \qquad (23)$$

Denotando con t^* l'istante in cui il corpo si arresta, abbiamo che t^* è dato per definizione dalla soluzione dell'equazione

$$v(t^*) = 0 \qquad (24)$$

ossia

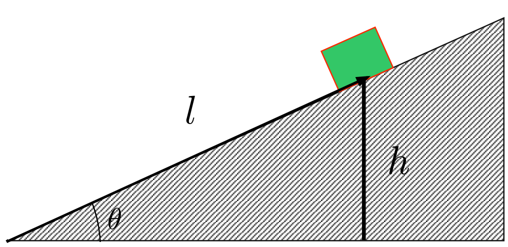
$$v_0 + at^* = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t^* = -\frac{v_0}{a} \qquad (25)$$

Utilizzando la (8) otteniamo

$$t^* = \frac{v_0}{g\,(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)} \qquad (26)$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{v_0}{g\,(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)} = \\ &= \frac{10\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s}}}{9.81\,\frac{\cancel{m}}{s^{\cancel{2}}}(\sin\frac{\pi}{10} + 0.25\cos\frac{\pi}{10})} = \\ &= \frac{1.019}{0.309 + 0.25\,\cdot 0.951}\,\mathrm{s} = \\ &= 1.86\,\mathrm{s} \end{aligned} \qquad (27)$$



3. Consideriamo ora l'istante in cui il corpo si arresta. Quando è fermo, su di esso agiscono (longitudinalmente al piano) le seguenti forze:

- componente longitudinale della forza peso,

$$P_{||} = -mg\sin\theta \qquad \text{(il segno ‘-’ perché è diretta verso il basso)}$$

- forza di attrito *statico*,

$$f_{\rm st} \qquad \text{(diretta verso l'alto)} \tag{28}$$

La forza di attrito statico $f_{\rm st}$ riesce a contro-bilanciare esattamente $P_{||}$ ($f_{\rm st} = -P_{||}$) e dunque a tenere il corpo fermo lungo il piano, purché non superi il valore massimo

$$|f_{\rm st}^{max}| = \mu_S\, mg\cos\theta \tag{29}$$

Quindi la condizione affinché il corpo rimanga fermo è che

$$|P_{||}| = |f_{\rm st}| \leq |f_{\rm st}^{max}| \tag{30}$$

Ricordando che $P_{||} = mg\sin\theta$ e la (29) otteniamo che

$$\begin{aligned} mg\sin\theta &\leq \mu_S\, mg\cos\theta \\ &\Downarrow \\ \tan\theta &\leq \mu_S \qquad \text{(condizione affinché il corpo resti fermo)} \end{aligned} \tag{31}$$

Sostituendo i valori abbiamo

$$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{10} = 0.325 \tag{32}$$

$$\mu_S = 0.35 \tag{33}$$

Quindi effettivamente il corpo rimane fermo in alto e non ridiscende, a causa della forza di attrito statico.

4. Si noti che, se l'angolo θ fosse stato un po' più grande (ad es. $\theta = \pi/9$ che corrisponde a 20^o anziché 18^o), oppure se il coefficiente di attrito fosse stato un po' più piccolo (piano più liscio), la condizione (31) non sarebbe stata soddisfatta, ed il corpo sarebbe ridisceso verso il basso. In tal caso, il tempo che il corpo avrebbe impiegato per tornare alla base del piano inclinato sarebbe stato *diverso* dal tempo impiegato per la prima salita, a causa della forza di attrito *dinamico*. La forza di attrito dinamico, infatti, si oppone alla direzione del moto. Pertanto, mentre nel tratto di moto ascendente $F_{\rm att}$ è diretta verso il basso ($F_{\rm att} = -\mu_D mg\cos\theta$), nel tratto di moto discendente $F_{\rm att}$ è diretta verso l'alto ($F_{\rm att} = +\mu_D mg\cos\theta$). Si noti che, al contrario, la componente longitudinale della forza peso è *sempre*, in ogni caso, diretta verso il basso. Se dunque il corpo fosse ridisceso, nel tratto discendente l'accelerazione longitudinale sarebbe stata data da

$$a' = \frac{F'_{||}}{m} = -g\,(\sin\theta - \mu_D\cos\theta) \tag{34}$$

che è dunque *inferiore* (in modulo) all'accelerazione in salita (8). Per calcolare il tempo t_{disc} di discesa possiamo applicare la formula per un moto uniformemente accelerato per coprire la distanza l

$$l = \frac{1}{2}|a'|\, t_{disc}^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_{disc} = \sqrt{\frac{2l}{|a'|}} \tag{35}$$

da cui

$$t_{disc} = \sqrt{\frac{2l}{g\,(\sin\theta - \mu_D \cos\theta)}} \tag{36}$$

Possiamo confrontare tale tempo col tempo t^* di salita,

$$t^* = \frac{v_0}{g\,(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)} \tag{37}$$

ricordando che

$$l = \frac{v_0^2}{2g\,(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)} = \left(\frac{v_0}{g\,(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}\right)^2 \cdot \frac{g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}{2} \tag{38}$$

abbiamo

$$l = \frac{v_0^2}{2g\,(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)} = \frac{g\,(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}{2}\, t^{*2} \tag{39}$$

e sostituendo in Eq.(40) otteniamo che

$$t_{disc} = t^* \sqrt{\frac{\sin\theta + \mu_D \cos\theta}{\sin\theta - \mu_D \cos\theta}} \; > t^* \tag{40}$$