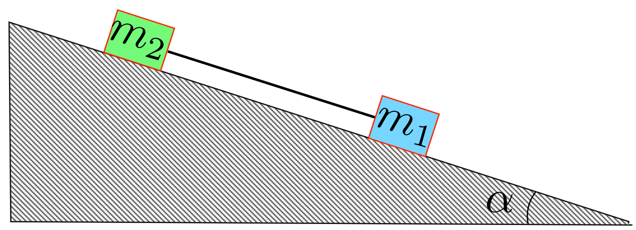
Esercizio (tratto dal Problema 2.21 del Mazzoldi)

Due corpi di masse $m_1 = 480\,\text{gr}$ e $m_2 = 760\,\text{gr}$, collegati da un filo, scendono lungo un piano, inclinato di un angolo $\alpha = 15^o$ rispetto all'orizzontale. Tra m_1 e il piano non c'è attrito, mentre tra m_2 ed il piano c'è un coefficiente di attrito dinamico μ_D.

1. Determinare il valore della tensione del filo e dell'accelerazione del sistema nel caso in cui $\mu_D = 0.4$;

2. Se si desidera che il moto del sistema lungo il piano sia uniforme, quale valore dovrebbe avere il coefficiente di attrito μ_D ?

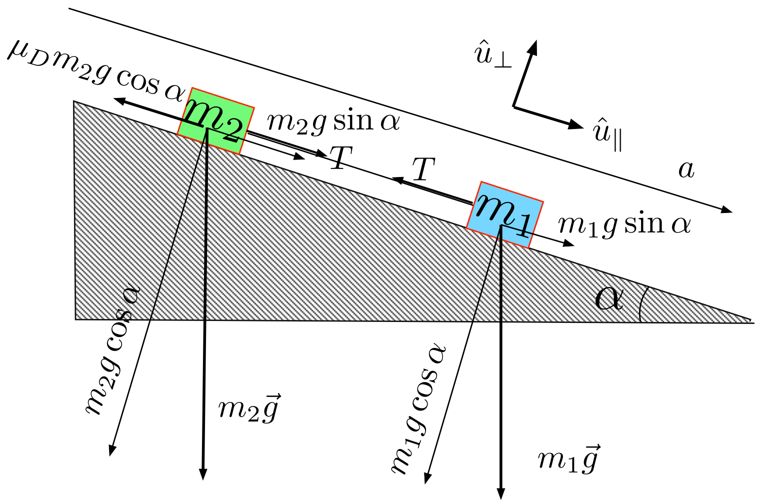


SOLUZIONE

DATI NOTI:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.48\,\text{kg} \\ m_2 &= 0.76\,\text{kg} \\ \alpha &= \tfrac{\pi}{12} \\ \mu_D &= 0.4 \end{aligned}$$

1. • Definiamo le direzioni longitudinale al piano $\hat{u}_{\parallel}$ ed ortogonale al piano $\hat{u}_{\perp}$, come indicato in figura, e disegniamo le forze che agiscono su ciascun corpo, scomponendole in tali due direzioni:



– **Forze che agiscono sul corpo m_1:**
-forza peso : $m_1\vec{g} = \underbrace{m_1\ g\sin\alpha}_{\text{comp. lungitudinale}}\ \hat{u}_{\parallel}\ \underbrace{-m_1\ g\cos\alpha}_{\text{comp. ortogonale}}\hat{u}_{\perp}$
-tensione del filo su m_1 : $\vec{T}_1 = -T\,\hat{u}_{\parallel}$
-reazione vincolare del piano su m_1 : $\vec{R}_1 = R_1\,\hat{u}_{\perp}$

– **Forze che agiscono sul corpo m_1:**
-forza peso : $m_2\vec{g} = \underbrace{m_2\ g\sin\alpha}_{\text{comp. lungitudinale}}\ \hat{u}_{\parallel}\ \underbrace{-m_2\ g\cos\alpha}_{\text{comp. ortogonale}}\hat{u}_{\perp}$
-tensione del filo su m_2 : $\vec{T}_2 = T\,\hat{u}_{\parallel}$
-forza d'attrito dinamico : $\vec{F}_{\text{att}} = -\mu_D|\vec{P}_{\perp}|\hat{u}_{\parallel} = -\mu_D\,m_2\ g\cos\alpha\,\hat{u}_{\parallel}$
-reazione vincolare del piano su m_2 : $\vec{R}_2 = R_2\,\hat{u}_{\perp}$

– **Accelerazioni:**
Dato che entrambi i corpi si muovono lungo il piano, l'accelerazione di entrambi ha componente solo lungo la direzione $\hat{u}_{\parallel}$. Inoltre il filo è inestensibile ed il sistema si muove solidalmente, per cui

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = a\,\hat{u}_{\parallel} \tag{1}$$

- Scriviamo ora, per ciascuno dei due corpi, la legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$, scomposta nelle componenti lungo il piano $\hat{u}_\parallel$ ed ortogonale al piano $\hat{u}_\perp$.

$$m_1) \qquad m_1\, g \sin\alpha\, \hat{u}_\parallel \; - m_1\, g\cos\alpha\, \hat{u}_\perp - T\, \hat{u}_\parallel + R_1\, \hat{u}_\perp = m_1\, a\, \hat{u}_\parallel \tag{2}$$

$$m_2) \qquad m_2\, g \sin\alpha\, \hat{u}_\parallel \; - m_2\, g\cos\alpha\, \hat{u}_\perp + T\, \hat{u}_\parallel - \mu_D m_2 g \cos\alpha\, \hat{u}_\parallel + R_2\, \hat{u}_\perp = m_2\, a\, \hat{u}_\parallel \tag{3}$$

Uguagliando in ciascuna equazione le componenti dei due membri otteniamo

  - dalle componenti di $\hat{u}_\perp$

$$\begin{cases} R_1 - m_1\, g\cos\alpha = 0 & \Rightarrow \qquad R_1 = m_1\, g\cos\alpha \\ R_2 - m_2\, g\cos\alpha = 0 & \Rightarrow \qquad R_2 = m_2\, g\cos\alpha \end{cases} \tag{4}$$

    otteniamo che le reazioni vincolati cancellano esattamente le componenti ortogonali della forza peso;

  - dalle componenti di $\hat{u}_\parallel$

$$\begin{cases} m_1\, g\sin\alpha - T = m_1\, a \\ \\ m_2\, g\sin\alpha\, + T\, - \mu_D m_2 g\cos\alpha = m_2\, a \end{cases} \tag{5}$$

    otteniamo un sistema di due equazioni per le due incognite a e T, che sono da determinarsi in funzione dei parametri m_1, m_2 e μ_D. Sommando le equazioni si ottiene

$$\begin{cases} m_1 g\sin\alpha - T & = \quad m_1 a \\ \\ (m_1+m_2) g\sin\alpha - \mu_D m_2 g\cos\alpha & = \quad (m_1+m_2)a \end{cases} \tag{6}$$

    da cui

$$\begin{cases} T & = \quad m_1(g\sin\alpha - a) \\ \\ a & = \quad g\sin\alpha - \frac{\mu_D m_2}{m_1+m_2} g\cos\alpha \end{cases} \tag{7}$$

    Sostituendo la seconda nella prima otteniamo

$$\begin{cases} T & = \quad \frac{\mu_D m_1 m_2}{m_1+m_2} g\cos\alpha \\ \\ a & = \quad g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_D m_2}{m_1+m_2}\cos\alpha\right) \end{cases} \tag{8}$$

- Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned} T \quad &= \quad \frac{0.4 \cdot 0.48\,\mathrm{kg} \cdot 0.76\,\cancel{\mathrm{kg}}}{(0.48+0.76)\,\cancel{\mathrm{kg}}} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cos\frac{\pi}{12} = \\ &= \quad 1.12 \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} = 1.12\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{9}$$

  e

$$\begin{aligned} a \quad &= \quad 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \left(\sin\frac{\pi}{12} - \frac{0.4 \cdot 0.76\,\cancel{\mathrm{kg}}}{(0.48+0.76)\,\cancel{\mathrm{kg}}} \cos\frac{\pi}{12}\right) = \\ &= \quad 0.13 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{10}$$

2. Per avere un moto rettilineo uniforme occorre che l'accelerazione a sia nulla. Dalla formula ottenuta in (8) per l'accelerazione abbiamo

$$\begin{aligned} a &= g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_D m_2}{m_1+m_2}\cos\alpha\right) = 0 \\ &\Rightarrow \ \mu_D = \frac{m_1+m_2}{m_2}\,\tan\alpha \end{aligned} \tag{11}$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} \mu_D &= \frac{(0.48+0.76)\,\cancel{\mathrm{kg}}}{0.76\,\cancel{\mathrm{kg}}} \cdot \tan\frac{\pi}{12} = \\ &= 0.44 \end{aligned} \tag{12}$$