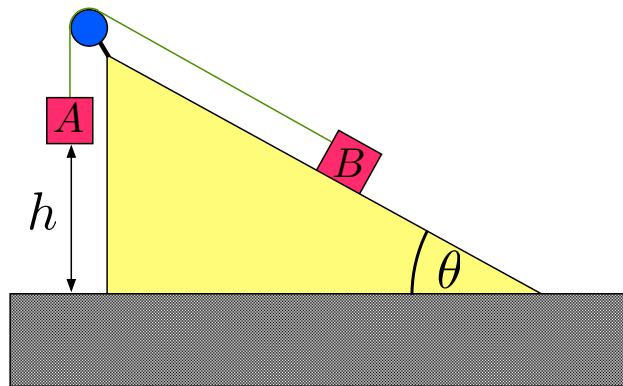


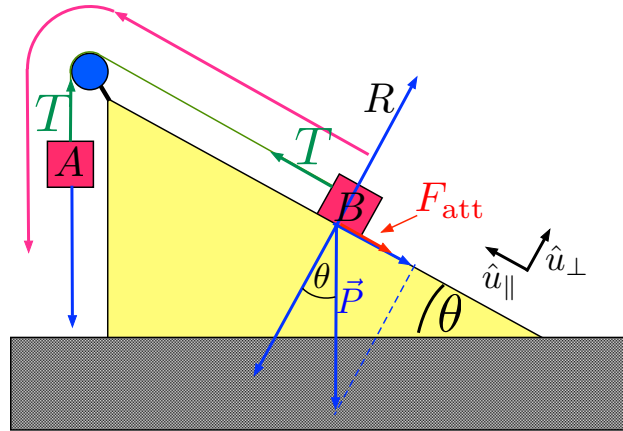
Esercizio (tratto dal Problema 2.19 del Mazzoldi)

Due masse uguali, collegate da un filo, sono disposte come in figura. L'angolo θ vale 30° , l'altezza h vale 1 m, il coefficiente di attrito massa-piano è $\mu = 0.4$. All'istante $t = 0$ il sistema viene lasciato libero di muoversi e si osserva che la massa sospesa scende. Calcolare:

1. l'accelerazione del sistema fino a che la massa sospesa tocca il suolo
2. il tempo impiegato dalla massa sospesa per giungere al suolo
3. la distanza totale d percorsa in salita dalla massa che si trova sul piano inclinato (si tenga presente che la massa che si trova sul piano inclinato prosegue il suo moto per un tratto anche dopo che la massa sospesa ha toccato il suolo).



SOLUZIONE



Fissiamo convenzionalmente il segno dell'accelerazione verso il basso per la massa m_A e lungo il piano inclinato (a salire) per la massa m_B .

1. Applichiamo le equazioni della dinamica a ciascuna delle due masse. Sul piano inclinato definiamo il versore \hat{u}_{\parallel} (lungo il piano, diretto a salire) e \hat{u}_{\perp} (ortogonale al piano, uscente). La forza peso \vec{P} si scompone nelle sue componenti P_{\parallel} parallela e P_{\perp} perpendicolare al piano

$$\vec{P} = P_{\parallel} \hat{u}_{\parallel} + P_{\perp} \hat{u}_{\perp} \quad (1)$$

dove

$$\begin{cases} P_{\parallel} = -m_B g \sin \theta \\ P_{\perp} = -m_B g \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

La componente ortogonale P_{\perp} è compensata esattamente dalla reazione vincolare R del piano, e quindi non dà luogo ad alcuna accelerazione nella direzione ortogonale. La forza di attrito ha modulo $|\vec{F}_{att}| = \mu P_{\perp}$ ed è diretta lungo il piano inclinato in verso opposto a quello del moto. Dal testo sappiamo che il moto di B è verso l'alto lungo il piano, dato che A scende. Dunque abbiamo

$$F_{att} = -\mu m_B g \cos \theta$$

Pertanto

$$\begin{cases} m_A a = m_A g - T \\ m_B a = T - \mu m_B g \cos \theta - m_B g \sin \theta \end{cases} \quad (3)$$

Utilizzando $m_A = m_B = m$ e sommando membro a membro le due equazioni otteniamo

$$2ma = mg(1 - \mu \cos \theta - \sin \theta) \quad (4)$$

da cui otteniamo

$$a = \frac{g(1 - \mu \cos \theta - \sin \theta)}{2} \quad (5)$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} a &= \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (1 - 0.4 \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6})}{2} = \\ &= 0.75 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

2. Dato che il corpo A parte con velocità nulla, si può applicare la formula per il tempo di caduta libera di un moto uniformemente accelerato con accelerazione a

$$t_{cad} = \sqrt{\frac{2h}{a}} \quad (7)$$

La formula (7) si può ricavare direttamente dalla legge oraria di A . Siccome il verso convenzionale scelto implica che l'asse z è rivolto verso il basso, la legge oraria per il moto di A si scrive $z_A(t) = -h + \frac{1}{2}at^2$, e imponendo che $z_A = 0$ si ottiene la (7). Sostituendo i valori numerici

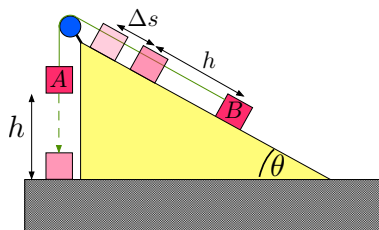
$$\begin{aligned} t_{cad} &= \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{0.75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \\ &= 1.63 \text{ s} \end{aligned} \quad (8)$$

3. Quando il corpo A raggiunge il suolo, il corpo B ha percorso un primo tratto di lunghezza pari ad h lungo il piano inclinato (dato che il filo è supposto inestensibile) e ha la stessa velocità (lungo il piano) che il corpo A possiede (verticalmente) al momento di impatto col suolo (sempre perché il filo è supposto inestensibile):

$$v_B = v_A = a t_{cad} = \sqrt{2ah} \quad (9)$$

Dopo che il corpo A ha toccato il suolo, il filo non esercita più alcuna tensione sul corpo B , che prosegue il suo moto verso l'alto sotto l'azione della componente longitudinale della forza peso e della forza di attrito (entrambe dirette verso il basso lungo il piano inclinato). Denotiamo con a' l'accelerazione del corpo B in questo secondo tratto Δs .

Per trovare la distanza percorsa in questo secondo tratto possiamo procedere in due



modi:

Primo modo (equazioni del moto):

Usando le equazioni del moto:

$$\begin{aligned}
 F &= ma' \\
 -\mu mg \cos \theta - mg \sin \theta &= ma' \\
 \Rightarrow a' &= -g(\mu \cos \theta + \sin \theta)
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Utilizziamo ora la formula (valida per il moto accelerato uniforme)

$$\frac{v_{fin}^2 - v_{in}^2}{2a'} = \Delta s
 \tag{11}$$

dove Δs è la distanza percorsa dal corpo B fino ad arrestarsi, $v_{in} = v_B = \sqrt{2ah}$ e $v_{fin} = 0$. Pertanto

$$\begin{aligned}
 \Delta s &= -\frac{v_{in}^2}{2a'} = \\
 &= \frac{2ah}{2g(\mu \cos \theta + \sin \theta)} = \\
 &= \frac{ah}{g(\mu \cos \theta + \sin \theta)}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Ricordando l'Eq.(5) possiamo scrivere

$$\Delta s = \frac{(1 - \mu \cos \theta - \sin \theta)h}{2(\mu \cos \theta + \sin \theta)}
 \tag{13}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned}
 \Delta s &= \frac{(1 - 0.4 \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6}) 1 \text{ m}}{2(0.4 \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6})} = \\
 &= 0.09 \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Quindi in totale la distanza percorsa dal corpo B lungo il piano è

$$d = h + \Delta s = 1.09 \text{ m}
 \tag{15}$$

Secondo modo (teorema dell'energia cinetica):

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica al secondo tratto del moto del corpo B :

$$\Delta K = W
 \tag{16}$$

dove ΔK è la variazione di energia cinetica e (dall'istante in cui la tensione non agisce più all'istante in cui il corpo B si arresta lungo il piano inclinato), e W è il lavoro delle forze che agiscono sul corpo B in tale tratto del moto (forza di attrito e componente

longitudinale della forza peso). Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned}
 \Delta K &= \frac{1}{2}m(v_{fin}^2 - v_{in}^2) = \\
 &= \frac{1}{2}m(0 - v_B^2) = \\
 &= -\frac{1}{2}m 2ah = \\
 &= -mah = \\
 &\quad [\text{usiamo l'eq.(5)}] \\
 &= -\frac{mg(1 - \mu \cos \theta - \sin \theta)h}{2}
 \end{aligned} \tag{17}$$

D'altra parte il lavoro W è

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{2^{\circ} \text{ tratto}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \\
 &= \int_{2^{\circ} \text{ tratto}} (\vec{F}_{att} + \vec{P}_{||}) \cdot d\vec{s} = \\
 &\quad [\vec{F}_{att} \text{ e } \vec{P}_{||} \text{ sono opposte al moto}] \\
 &= - \int_{2^{\circ} \text{ tratto}} (|F_{att}| + |P_{||}|) ds = \\
 &\quad [\vec{F}_{att} \text{ e } \vec{P}_{||} \text{ sono costanti}] \\
 &= -(|F_{att}| + |P_{||}|) \Delta s = \\
 &= -(\mu mg \cos \theta + mg \sin \theta) \Delta s
 \end{aligned} \tag{18}$$

Sostituendo (17) e (18) nell'Eq.(16) otteniamo

$$-\frac{mg(1 - \mu \cos \theta - \sin \theta)h}{2} = -(\mu mg \cos \theta + mg \sin \theta) \Delta s \tag{19}$$

da cui

$$\Delta s = \frac{(1 - \mu \cos \theta - \sin \theta)h}{2(\mu \cos \theta + \sin \theta)} \tag{20}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned}
 \Delta s &= \frac{(1 - 0.4 \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6}) 1 \text{ m}}{2(0.4 \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6})} = \\
 &= 0.09 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Quindi in totale la distanza percorsa dal corpo B lungo il piano è

$$d = h + \Delta s = 1.09 \text{ m} \tag{22}$$