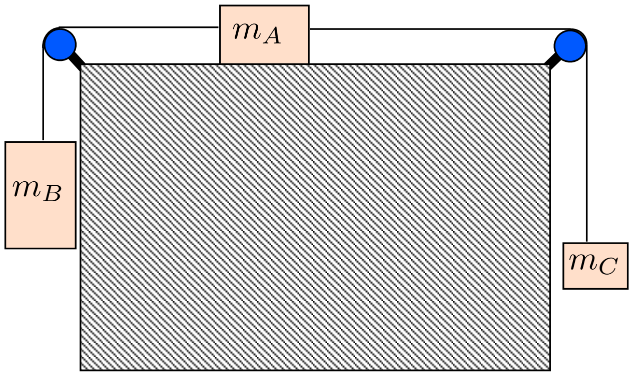
Esercizio (tratto dal Problema 2.18 del Mazzoldi)

Un corpo di massa $m_A = 2\,\mathrm{kg}$ è posto su un piano orizzontale liscio. Esso è collegato tramite due fili a due corpi di masse $m_B = 4\,\mathrm{kg}$ e $m_C = 1\,\mathrm{kg}$. Calcolare:

1. l'accelerazione del sistema delle tre masse
2. le tensioni dei due fili



SOLUZIONE

Dati noti
$m_A = 2\,\mathrm{kg}$
$m_B = 4\,\mathrm{kg}$
$m_C = 1\,\mathrm{kg}$

- Osserviamo anzitutto che, siccome i fili sono supposti inestensibili, il sistema dei blocchi e dei fili si muove solidalmente, ossia istante per istante la velocità e l'accelerazione sono le stesse in modulo per tutte le parti del sistema. Non sappiamo se il sistema si muoverà solidalmente in senso orario o antiorario. Scegliamo allora un verso convenzionale rispetto a cui scrivere tutte le forze e l'accelerazione a. Tale verso è arbitrario, ma tutte le forze e le accelerazioni devono essere scritte consistentemente con tale orientazione, ossia prendendole come positive se concordi e negative se discordi al verso convenzionale. Scegliamo ad esempio il verso antiorario come indicato in Fig.1.

  Se, alla fine dei calcoli, l'accelerazione a risulterà positiva, il moto fisico del sistema sarà proprio quello del verso convenzionale scelto. Se invece a risulterà negativa, il moto avverrà fisicamente in direzione opposta a quello convenzionale scelto.

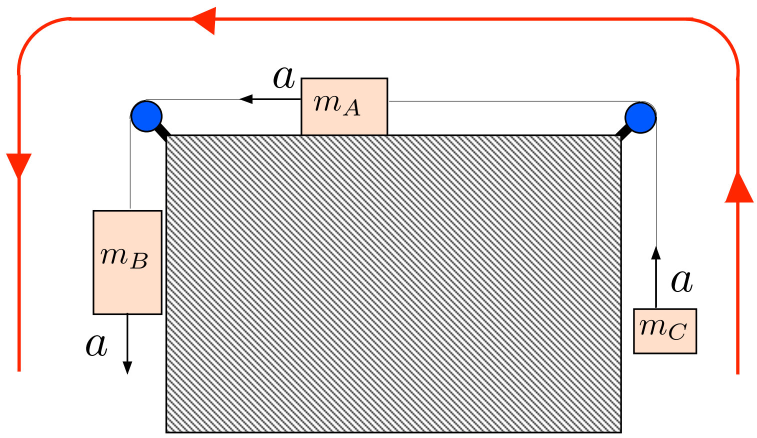


Figure 1: Scegliamo ad esempio il verso antiorario come quello convenzionale. Le forze che compaiono nelle equazioni della dinamica sono scritte con segno positivo o negativo rispetto a tale verso.

- Disegniamo ora le forze che agiscono su ciascun corpo (come mostrato in Fig.2) e scriviamo per ciascun corpo la seconda legge della dinamica

$$F = ma \tag{1}$$

  tenendo conto del verso convenzionale scelto. Abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{lcll} m_B g - T_1 & = & m_B\, a & (I) \\ T_1 - T_2 & = & m_A\, a & (II) \\ -m_C g + T_2 & = & m_C\, a & (III) \end{array} \right. \tag{2}$$

  Abbiamo dunque un sistema di tre equazioni per le tre incognite T_1, T_2 e a.

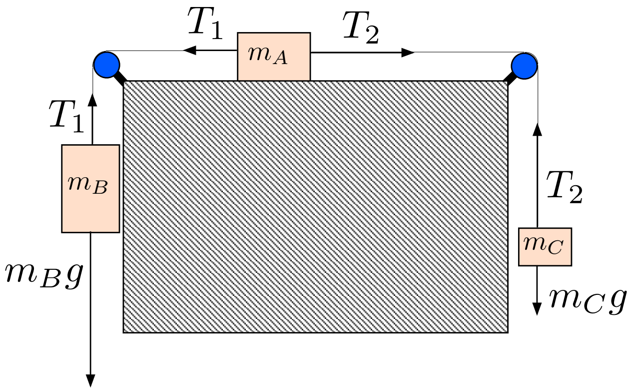


Figure 2: le forze che agiscono su ciascun corpo

- Risolviamo il sistema. Dalla somma delle 3 equazioni $(I)+(II)+(III)$ otteniamo

$$\begin{aligned} m_B g - T_1 + (T_1 - T_2) + (-m_C g + T_2) &= (m_B + m_A + m_C)a \\ &\Downarrow \\ m_B g - m_C g &= (m_B + m_A + m_C)a \end{aligned} \tag{3}$$

da cui otteniamo

$$\boxed{a = \frac{(m_B - m_C)\,g}{m_A + m_B + m_C}} \tag{4}$$

Sostituendo ora i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{(4\,\mathrm{kg} - 1\,\mathrm{kg})\,9.81\,\mathrm{m/s^2}}{(2+4+1)\,\mathrm{kg}} = \\ &= \frac{3}{7} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 4.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{5}$$

- Sostituiamo ora il risultato (4) nell'Eq.(I) del sistema (2), ed otteniamo

$$\begin{aligned} m_B a &= m_B g - T_1 \\ &\Downarrow \\ T_1 &= m_B g - m_B a = m_B(g-a) = \\ &= m_B \left(g - \frac{(m_B - m_C)g}{m_A + m_B + m_C} \right) = \\ &= m_B g \left(1 - \frac{m_B - m_C}{m_A + m_B + m_C} \right) = \\ &= m_B \left(\frac{m_A + 2m_C}{m_A + m_B + m_C} \right) g \end{aligned} \tag{6}$$

ossia

$$\boxed{T_1 = m_B \left(\frac{m_A + 2m_C}{m_A + m_B + m_C} \right) g} \tag{7}$$

NOTA BENE: Dall'Eq.(7) si vede che la tensione del filo 1 che collega m_A e m_B è determinata anche da m_C, e che m_C entra a determinare tale tensione con un fattore 2, ossia m_C conta il doppio delle altre masse.

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned} T_1 &= m_B \left(\frac{m_A + 2m_C}{m_A + m_B + m_C} \right) g = \\ &= 4\,\mathrm{kg} \, \frac{(2\,\mathrm{kg} + 2 \cdot \, 1\mathrm{kg})}{(2+4+1)\,\mathrm{kg}} \cdot 9.81 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 4\,\mathrm{kg} \cdot \frac{4}{7} \cdot 9.81 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 22.4\,\mathrm{kg} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 22.4\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{8}$$

- Sostituiamo infine (4) e (7) nella (III) del sistema (2)

$$\begin{aligned} -m_C g + T_2 &= m_C \, a \\ &\Downarrow \\ T_2 &= m_C (g + a) = \\ &= m_C \left(g + \frac{(m_B - m_C) g}{m_A + m_B + m_C} \right) = \\ &= m_C g \left(1 + \frac{m_B - m_C}{m_A + m_B + m_C} \right) = \\ &= m_C \left(\frac{m_A + 2m_B}{m_A + m_B + m_C} \right) g \end{aligned} \tag{9}$$

ossia

$$\boxed{T_2 = m_C \left(\frac{m_A + 2m_B}{m_A + m_B + m_C} \right) g} \tag{10}$$

NOTA BENE: Dall'Eq.(10) si vede che la tensione del filo 2 che collega m_A e m_C è determinata anche da m_B, e che m_B entra a determinare tale tensione con un fattore 2, ossia m_B conta il doppio delle altre masse.

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned} T_2 &= m_C \left(\frac{m_A + 2m_B}{m_A + m_B + m_C} \right) g = \\ &= 1\,\mathrm{kg} \, \frac{2\,\mathrm{kg} + 2 \cdot \, 4\mathrm{kg}}{(2+4+1)\,\mathrm{kg}} \cdot 9.81 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= \frac{10}{7} \cdot 9.81 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 14.0\,\mathrm{kg} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 14.0\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{11}$$