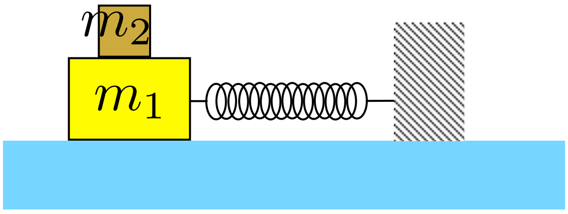
Esercizio (tratto dal Problema 2.9 del Mazzoldi)

Un corpo di massa $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ è attaccato ad una molla di costante elastica $k = 25\,\mathrm{N/m}$. Sopra m_1 è poggiato un secondo corpo di massa $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$; il coefficiente di attrito statico tra i due è $\mu_s = 0.4$. Calcolare la massima elongazione rispetto alla posizione di riposo che può avere il sistema se si vuole che m_2 non si muova rispetto ad m_1.



SOLUZIONE

DATI NOTI

$$\begin{aligned} m_1 &= 3\,\mathrm{kg} \\ m_2 &= 1\,\mathrm{kg} \\ k &= 25\,\mathrm{N/m} \\ \mu_s &= 0.4 \end{aligned}$$

1. Consideriamo il corpo m_1: se non ci fosse attrito col corpo m_2, il corpo m_1, richiamato dalla molla, sfilerebbe sotto al corpo m_2, senza 'trascinarselo dietro'. Il corpo m_2 rimarrebbe dunque esattamente fermo dov'è senza seguire il corpo m_1 (e dunque dopo un po' cadrebbe a terra). A causa dell'attrito, il corpo m_1 non è dunque libero di muoversi sotto l?effetto della molla come se il corpo sopra non ci fosse: l'attrito esercitato dal corpo m_2, 'cerca di trattenere' il corpo m_1 nel suo moto verso destra. Quindi la forza che m_2 esercita su m_1 è diretta verso sinistra.
   Al tempo stesso il corpo m_2, che in assenza di attrito rimarrebbe fermo dov?è, viene trascinato dal corpo m_1 (che si sposta a destra tirato alla molla) grazie all?attrito. Quindi la forza che m_1 esercita su m_2 è diretta verso destra.

2. Alla luce di queste considerazioni, le equazioni di Newton per i due corpi sono

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -F_{\rm att} + k|\Delta l| \\ \\ m_2 a_2 = F_{\rm att} \end{cases} \tag{1}$$

   dove $F_{\rm att}$ indica la forza di attrito che m_1 esercita su m_2, uguale e contraria alla forza $-F_{\rm att}$ che m_2 esercita su m_1.

3. Se ora m_2 non si muove rispetto a m_1, questo significa che

$$a_2 = a_1 = a \tag{2}$$

   NOTA BENE: Entrambi si muovono solidalmente rispetto al ripiano.

Con la condizione (2) il sistema (1) di equazioni diventa

$$\begin{cases} m_1 a &= -F_{\rm att} + k|\Delta l| \\ \\ m_2 a &= F_{\rm att} \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} m_1 a &= -m_2 a + k|\Delta l| \\ \\ m_2 a &= F_{\rm att} \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} (m_1+m_2) a &= k|\Delta l| \\ \\ F_{\rm att} &= m_2 a \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} a &= \frac{k}{m_1+m_2}|\Delta l| \\ \\ F_{\rm att} &= m_2 \frac{k}{m_1+m_2}|\Delta l| \end{cases} \tag{3}$$

Ciò è possibile se tale forza di attrito è non superiore alla forza di attrito statico massima, ossia se

$$\begin{aligned} F_{\rm att} &\leq F_{\rm att}^{\max} \\ &\Downarrow \\ m_2 \frac{k}{m_1+m_2}|\Delta l| &\leq \mu_s m_2 g \\ &\Downarrow \\ |\Delta l| &\leq \frac{\mu_s (m_1+m_2) g}{k} \end{aligned} \tag{4}$$

Ogni allungamento $|\Delta l|$ della molla che soddisfi tale disuguaglianza consente dunque al corpo m_2 di rimanere fermo rispetto a m_1. Pertanto l'allungamento massimo consentito vale

$$\Delta l_{\max} = \frac{\mu_s (m_1+m_2) g}{k} \tag{5}$$

Sostituendo i dati iniziali si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta l_{\max} &= \frac{0.4\,(3\,{\rm kg} + 1\,{\rm kg})\,9.81\frac{\rm m}{\rm s^2}}{25\frac{\rm N}{\rm m}} = \\ &= \frac{1.6 \cdot 9.81 {\rm kg}\frac{\rm m}{\rm s^2}}{25\frac{\rm N}{\rm m}} \\ & \quad (\text{usiamo N} = {\rm kg\,m/s^2}) \\ &= 0.63\,{\rm m} \end{aligned} \tag{6}$$