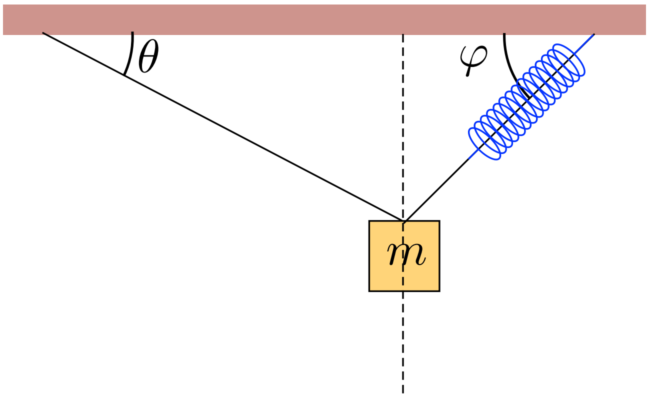
Esercizio

Un corpo di massa $m = 8\,\mathrm{kg}$ è tenuto in equilibrio verticalmente sul piano xz dall'azione contemporanea di una molla di costante elastica $k = 120\,\mathrm{N/m}$ e di un filo. Si osserva che gli angoli che il filo e la molla formano con l'asse orizzontale sono $\theta = 30^o$ e $\varphi = 45^o$ rispettivamente. Calcolare la tensione T del filo e l'allungamento $|\Delta l|$ della molla.

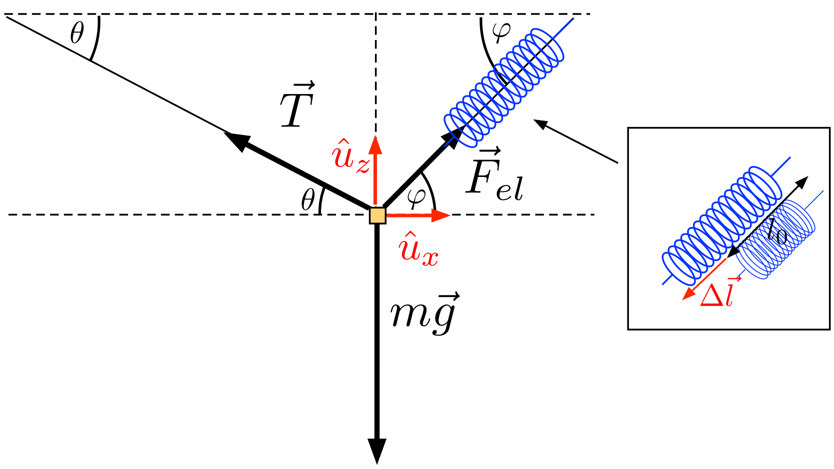


SOLUZIONE

Dati noti
$m = 8\,\text{kg}$
$k = 120\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$
$\theta = \frac{\pi}{6}$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

- Sul corpo di massa m agiscono 3 forze:
  1. la forza peso $m\vec{g}$ (diretta verticalmente verso il basso);
  2. la tensione $\vec{T}$ del filo;
  3. la forza elastica $\vec{F}_{el} = -k\vec{\Delta l}$.

  che sono disegnate in figura (l'inserto mostra la differenza tra molla a riposo e molla allungata).



- Dato che il corpo è in quiete (=la sua velocità è *costantemente* nulla), per la prima legge della dinamica la somma (vettoriale) delle forze che agiscono sul corpo è nulla

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{el} = 0 \qquad (1)$$

- Scomponiamo ciascuna di queste forze lungo i due versori orizzontali e verticale $\hat{u}_x$ e $\hat{u}_z$

$$m\vec{g} = -mg\,\hat{u}_z \qquad (2)$$
$$\vec{T} = -T\cos\theta\,\hat{u}_x + T\sin\theta\,\hat{u}_z \qquad (3)$$
$$\vec{F}_{el} = -k\,\Delta\vec{l} = +k|\Delta\vec{l}|\cos\varphi\,\hat{u}_x + k|\Delta\vec{l}|\sin\varphi\,\hat{u}_z \qquad (4)$$

  dove $T = |\vec{T}|$ è il modulo della tensione del filo e $|\Delta\vec{l}|$ il modulo dell'allungamento della molla.

- Sostituendo in (1) otteniamo

$$-mg\,\hat{u}_z \;\; - T\cos\theta\,\hat{u}_x + T\sin\theta\,\hat{u}_z \;\; + k|\Delta\vec{l}|\cos\varphi\,\hat{u}_x + k|\Delta\vec{l}|\sin\varphi\,\hat{u}_z = 0$$
[raccogliamo tutto ciò che moltiplica $\hat{u}_x$ e tutto ciò che moltiplica $\hat{u}_z$]
$$(-T\cos\theta + k|\Delta\vec{l}|\cos\varphi)\,\hat{u}_x \; + \; (T\sin\theta - mg + k|\Delta\vec{l}|\sin\varphi)\,\hat{u}_z = 0 \qquad (5)$$

Affinché il vettore a sinistra sia nullo è necessario che si annullino entrambe le sue componenti, e dunque

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -T\cos\theta + k|\Delta\vec{l}\,|\cos\varphi & = & 0 \\ T\sin\theta - mg + k|\Delta\vec{l}\,|\sin\varphi & = & 0 \end{array} \right. \tag{6}$$

Questo è un sistema di due equazioni per le due incognite T e $|\Delta\vec{l}\,|$. Ricordando che $\theta = \frac{\pi}{6}$ e che $\varphi = \frac{\pi}{4}$ otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\dfrac{T\sqrt{3}}{2} + \dfrac{k|\Delta\vec{l}\,|}{\sqrt{2}} & = & 0 \\ \dfrac{T}{2} - mg + \dfrac{k|\Delta\vec{l}\,|}{\sqrt{2}} & = & 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

- Per risolvere il sistema procediamo in questo modo:

  1. Sottraiamo la prima equazione dalla seconda. $\mathrm{II}^a - \mathrm{I}^a$

  $$T\,\frac{\sqrt{3}+1}{2} - mg = 0 \tag{8}$$

  $$\Downarrow$$

  $$T = \frac{2mg}{\sqrt{3}+1} \tag{9}$$

  Sostituendo i valori

  $$\begin{aligned} T &= \frac{2 \cdot 8\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\sqrt{3}+1} = \\ &= 57.45\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 57.45\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{10}$$

  2. Dalla prima delle Eq.(7) ricaviamo che

  $$|\Delta\vec{l}\,| = \frac{T}{k}\sqrt{\frac{3}{2}} \tag{11}$$

  Sostituendo i valori

  $$\begin{aligned} T &= \frac{57.45\,\cancel{\mathrm{N}}}{120\,\frac{\cancel{\mathrm{N}}}{\mathrm{m}}}\sqrt{\frac{3}{2}} = \\ &= 0.59\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{12}$$