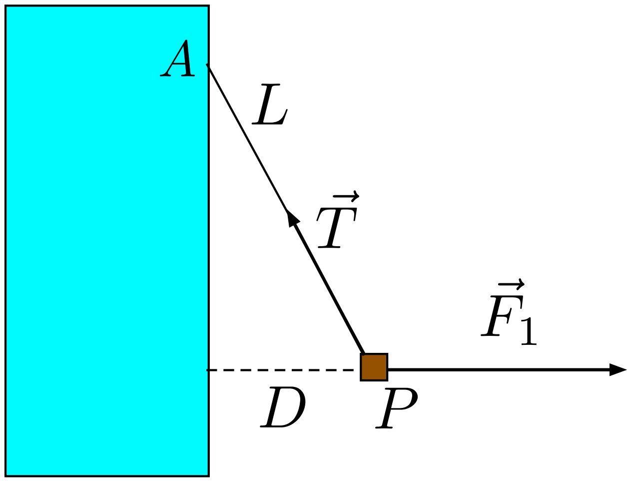
Esercizio (tratto dal Problema 4-3 del Focardi)

Un corpo di massa $m = 30\,\mathrm{kg}$ è tenuto in equilibrio dall'azione contemporanea di una forza orizzontale $\vec{F}$ e dalla tensione $\vec{T}$ esercitata da un filo di lunghezza $L = 2\,\mathrm{m}$ nella posizione P indicata in figura, che dista $D = 80\,\mathrm{cm}$ dalla parete verticale a cui è attaccato l'estremo A del filo. Determinare i moduli $F = |\vec{F}|$ e $T = |\vec{T}|$ delle due forze.

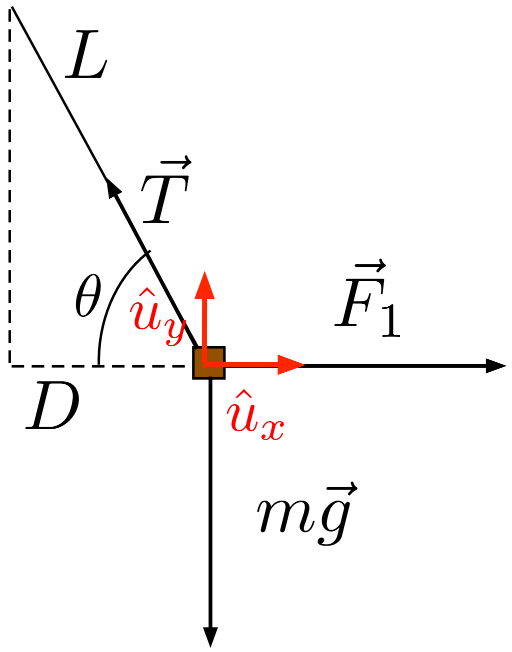


SOLUZIONE

Dati noti
$m = 30\,\mathrm{kg}$
$D = 0.8\,\mathrm{m}$
$L = 2\,\mathrm{m}$

- Sul corpo di massa m agiscono 3 forze:
  1. la forza $\vec{F}$ diretta orizzontalmente;
  2. la tensione $\vec{T}$ del filo;
  3. la forza peso $m\vec{g}$ diretta verso il basso

  che sono disegnate in figura.



- Dato che il corpo è in quiete (=la sua velocità è costantemente nulla), per la prima legge della dinamica la somma (vettoriale) delle forze che agiscono sul corpo è nulla

$$\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = 0 \tag{1}$$

- Scomponiamo ciascuna di queste forze lungo i due versori orizzontali e verticale $\hat{u}_x$ e $\hat{u}_y$

$$\vec{F} = F\,\hat{u}_x \tag{2}$$
$$\vec{T} = -T\cos\theta\,\hat{u}_x + T\sin\theta\hat{u}_y \tag{3}$$
$$m\vec{g} = -mg\,\hat{u}_y \tag{4}$$

  dove $F = |\vec{F}|$, $T = |\vec{T}|$ e θ indica l'angolo che il filo forma con l'asse orizzontale.

- Sostituendo in (1) otteniamo

$$\begin{aligned} F\,\hat{u}_x \quad - T\cos\theta\,\hat{u}_x + T\sin\theta\hat{u}_y \;+\; -mg\,\hat{u}_y &= 0 \\ &\text{[raccogliamo tutto ciò che moltiplica } \hat{u}_x \text{ e tutto ciò che moltiplica } \hat{u}_y\text{]} \\ (F - T\cos\theta)\,\hat{u}_x \;+\; (T\sin\theta - mg)\,\hat{u}_y &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

  Affinché il vettore a sinistra sia nullo è necessario che si annullino entrambe le sue componenti, e dunque

$$\begin{cases} F &= T\cos\theta \\ mg &= T\sin\theta \end{cases} \tag{6}$$

  ossia

$$\begin{cases} \dfrac{F}{T} &= \cos\theta \\ \\ \dfrac{mg}{T} &= \sin\theta \end{cases} \tag{7}$$

- D'altra parte:

  1. osserviamo che

$$\cos\theta = \frac{D}{L} \tag{8}$$

     e dunque dalla prima equazione (7) ricaviamo che

$$\frac{F}{T} = \frac{D}{L} \tag{9}$$

  2. osserviamo anche che dalla (7)

$$\begin{aligned} \cos^2\theta + \sin^2\theta &= 1 \\ &\Downarrow \\ \frac{F^2}{T^2} + \frac{(mg)^2}{T^2} &= 1 \\ \text{[uso la (8)]} &\Downarrow \\ \frac{D^2}{L^2} + \frac{(mg)^2}{T^2} &= 1 \\ &\Downarrow \\ \frac{(mg)^2}{T^2} &= 1 - \frac{D^2}{L^2} \\ &\Downarrow \\ T &= \frac{mg}{\sqrt{1 - \frac{D^2}{L^2}}} \end{aligned} \tag{10}$$

     Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{30\,\text{kg}\cdot 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\sqrt{1 - \frac{(0.8\,\cancel{\text{m}})^2}{(2\,\cancel{\text{m}})^2}}} = \\ &= \frac{294.3}{\sqrt{0.84}}\,\underbrace{\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}_{\text{N}} = \\ &= 321.1\,\text{N} \end{aligned} \tag{11}$$

3. Dalla (9) otteniamo allora che

$$F = T\,\frac{D}{L} \tag{12}$$

e sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} F &= 321.1\,\mathrm{N}\,\frac{(0.8\,\cancel{\mathrm{m}})^2}{(2\,\cancel{\mathrm{m}})} = \\ &= 128.4\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{13}$$