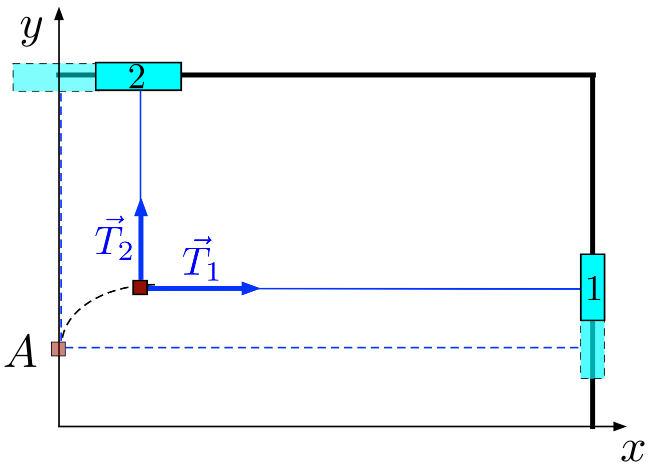
Esercizio

Un blocco di massa $m = 2\,\text{kg}$, inizialmente fermo sul piano orizzontale xy nel punto di coordinate $A = (0, 1)$m, viene trainato tramite due cavi avvolgibili collegati a due carrelli che scorrono su binari perpendicolari. Il cavo del carrello 1, che scorre lungo un binario parallelo all'asse y, applica una forza che cresce linearmente nel tempo secondo la legge $f_x(t) = c\,t$, con $c = 5\,\text{N/s}$, mentre il cavo del carrello 2, che scorre lungo un binario parallelo all'asse x, applica una una forza costante $f_y = 2\,\text{N}$. Calcolare la legge oraria $\vec{r}(t)$ del corpo e l'equazione cartesiana della traiettoria che effettua sul piano xy.



SOLUZIONE

Dati noti
$m = 2\,\mathrm{kg}$
$\vec{r}(0) = (x_0, y_0) = (0, 1)\,\mathrm{m}$
$\vec{v}(0) = 0$
$\vec{T}_1 = (f_x(t), 0) \quad \text{con} \quad f_x(t) = c\,t \quad \text{e } c = 5\,\mathrm{N/s}$
$\vec{T}_2 = (0, f_y) \quad \text{con} \quad f_y(t) = \text{cost} = 2\,\mathrm{N}$

- Il corpo m è soggetto alle tue tensioni $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ dei cavi. Dalla seconda legge della dinamica

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\,\vec{a} \\ &\Downarrow \\ \vec{T}_1 + \vec{T}_2 &= m\,\vec{a} \\ &\Downarrow \\ f_x(t)\,\hat{u}_x + f_y\,\hat{u}_y &= ma_x\,\hat{u}_x + ma_y\,\hat{u}_y \end{aligned} \tag{1}$$

- I due vettori a destra e sinistra del segno "=" nell'Eq.(1) sono uguali se e solo se le componenti corrispondenti ai due versori $\hat{u}_x$ e $\hat{u}_y$ sono uguali, ossia se:

$$\begin{cases} f_x(t) = m\,a_x \\ \\ f_y = ma_y \end{cases} \tag{2}$$

Ricordando che $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ e $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ e dividendo per m, si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{f_x(t)}{m} \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{f_y}{m} \end{cases} \tag{3}$$

Risolvendo il sistema (3) di equazioni differenziali otterremo le leggi orarie $x(t)$ e $y(t)$ e dunque la legge oraria del vettore posizione $\vec{r}(t) = x(t)\hat{u_x} + y(t)\hat{u}_y$, di cui $x(t)$ e $y(t)$ sono componenti.

1. **Equazione lungo x:**
   Iniziamo dalla prima delle Eq.(3). Ricordando che $f_x(t) = c\,t$ abbiamo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{c}{m}\,t \tag{4}$$

   Per risolvere l'equazione procediamo in due passi:

   (a) Passo 1: Troviamo la legge oraria della velocità $v_x(t)$.

Usando $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$, l'Eq.(4) diventa

$$
\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \frac{c}{m}\,t \\
\text{[integro nel tempo]} \quad &\Downarrow \\
\int_0^t \frac{dv_x}{dt'}\,dt' &= \int_0^t \frac{c}{m}\,t'\,dt' \\
\text{[a sinistra applico teorema fondam. del calcolo integrale]} \quad &\Downarrow \quad \text{[a destra porto fuori la costante } \tfrac{c}{m}\text{]} \\
v_x(t) - \underbrace{v_x(0)}_{=0} &= \frac{c}{m}\int_0^t t'\,dt' \\
&\Downarrow \\
v_x(t) &= \frac{c}{2m}t^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(b) Passo 2: Troviamo la legge oraria della posizione $x(t)$. Integrando la $v_x(t)$ nel tempo

$$
\begin{aligned}
v_x = \frac{dx}{dt} &= \frac{c}{2m}\,t^2 \\
\text{[integro nel tempo]} \quad &\Downarrow \\
\int_0^t \frac{dx}{dt'}\,dt' &= \int_0^t \frac{c}{2m}\,t'^2\,dt' \\
\text{[a sinistra applico teorema fondam. del calcolo integrale]} \quad &\Downarrow \quad \text{[a destra porto fuori la costante } \tfrac{c}{2m}\text{]} \\
x(t) - \underbrace{x(0)}_{=0} &= \frac{c}{6m}t^3 \\
&\Downarrow \\
x(t) &= \frac{c}{6m}t^3
\end{aligned}
\tag{6}
$$

2. **Equazione lungo y:**
   Passiamo ora alla seconda delle Eq.(3). Ricordando che $f_y(t) = f_y = \text{cost}$ abbiamo

$$
\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{f_y}{m} \tag{7}
$$

   Per risolvere l'equazione procediamo in due passi:

   (a) Passo 1: Troviamo la legge oraria della velocità $v_y(t)$.

Usando $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt}$, l'Eq.(7) diventa

$$\begin{aligned}
\frac{dv_y}{dt} &= \frac{f_y}{m} \\
\text{[integro nel tempo]} \quad & \Downarrow \\
\int_0^t \frac{dv_y}{dt'}\,dt' &= \int_0^t \frac{f_y}{m}\,dt' \\
\text{[a sinistra applico teorema fondam. del calcolo integrale]} \quad & \Downarrow \quad \text{[a destra porto fuori la costante } \tfrac{c}{m}\text{]} \\
v_y(t) - \underbrace{v_y(0)}_{=0} &= \frac{f_y}{m} t \\
& \Downarrow \\
v_y(t) &= \frac{f_y}{m} t
\end{aligned} \tag{8}$$

(b) Passo 2: Troviamo la legge oraria della posizione $y(t)$. Integrando la $v_y(t)$ nel tempo

$$\begin{aligned}
v_y = \frac{dy}{dt} &= \frac{f_y}{m}\, t \\
\text{[integro nel tempo]} \quad & \Downarrow \\
\int_0^t \frac{dy}{dt'}\,dt' &= \int_0^t \frac{f_y}{m}\, t'\,dt' \\
\text{[a sinistra applico teorema fondam. del calcolo integrale]} \quad & \Downarrow \quad \text{[a destra porto fuori la costante } \tfrac{f_y}{m}\text{]} \\
y(t) - \underbrace{y(0)}_{=y_0} &= \frac{f_y}{2m} t^2 \\
& \Downarrow \\
y(t) &= y_0 + \frac{f_y}{2m} t^2
\end{aligned} \tag{9}$$

- In conclusione la legge oraria del blocco di massa m è

$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\hat{u_x} + y(t)\hat{u}_y \qquad \text{con:} \quad \left\{ \begin{aligned} x(t) &= \tfrac{c}{6m} t^3 \\ y(t) &= y_0 + \tfrac{f_y}{2m} t^2 \end{aligned} \right.} \tag{10}$$

- Per ricavare l'equazione della traiettoria occorre eliminare il parametro tempo t dalle Eq.(10). A tale scopo possiamo ad esempio esprimere il tempo in termini della x usando la prima equazione

$$x = \frac{c}{6m} t^3 \qquad \Rightarrow \qquad t = \left(\frac{6m}{c} x \right)^{1/3} \tag{11}$$

e sostituendo nella seconda delle Eq.(10) otteniamo

$$y = y_0 + \frac{f_y}{2m} \left(\frac{6m}{c} \right)^{2/3} x^{2/3} \tag{12}$$

Indichiamo con C la costante

$$C \doteq \frac{f_y}{2m} \left(\frac{6m}{c} \right)^{2/3} \tag{13}$$

il cui valore è

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\cancel{2}\,\mathrm{N}}{\cancel{2}\cdot 2\,\mathrm{kg}}\left(\frac{6\cdot 2\,\mathrm{kg}}{5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}}\right)^{2/3} \\
&\quad [\text{uso N} = \tfrac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}] \\
&= \frac{\frac{\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2\,\cancel{\mathrm{kg}}}\left(\frac{12}{5}\,\frac{\cancel{\mathrm{kg}}}{\frac{\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}}\right)^{2/3} \\
&= 0.67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}^{2/3}}
\end{aligned} \tag{14}$$

l'equazione della traiettoria del blocco m risulta pertanto:

$$\boxed{y = y_0 + C\,x^{2/3}} \tag{15}$$

che è disegnata in figura.