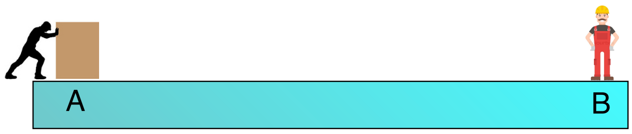
Esercizio

Due operai devono spostare dei sacchi di sabbia di massa $m_0 = 10\,\mathrm{kg}$ da un punto A ad un punto B. Per facilitare il trasporto, sul percorso A→B lungo $d = 20\,\mathrm{m}$ viene posta una guida rettilinea con un cuscinetto d'aria in modo da eliminare completamente l'attrito del terreno. Il primo operaio, posto in A, lancia ciascun sacco con velocità iniziale $v_0 = 6\,\mathrm{m/s}$, ed il secondo operaio, posizionato in B, lo raccoglie.

1. Con quale velocità arriva in B ciascun sacco? Calcolare il tempo impiegato da ciascun sacco per arrivare A→B

Si osserva poi che uno dei sacchi ha un foro, da cui fuoriesce la sabbia ad un ritmo costante di $c = 1\,\mathrm{kg/s}$.

2. Calcolare in quanto tempo il sacco forato arriva in B e con quale velocità.



SOLUZIONE

Dati noti
$m_0 = 10\,\mathrm{kg}$
$v_0 = 6\,\mathrm{m/s}$
$c = 1\,\mathrm{kg/s}$
$d = 20\,\mathrm{m}$

1. Nel caso di un sacco normale (senza fori), subito dopo il lancio non agiscono altre forze sul sacco (non c'è attrito lungo il percorso) e dunque per la prima legge della dinamica la velocità rimane costante e pari a $v_0 = 6\,\mathrm{m/s}$ anche nel punto B di arrivo. Essendo il moto rettilineo uniforme il tempo t^* di arrivo è semplicemente dato da

$$d = v_0\, t^* \qquad \Rightarrow \qquad t^* = \frac{d}{v_0} \tag{1}$$

Sostituendo i valori

$$t^* = \frac{20\,\cancel{\mathrm{m}}}{6\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}} = 3.30\,\mathrm{s} \tag{2}$$

2. Nel caso del sacco forato, la massa del sacco decresce ad un ritmo costante di $c = 1\,\mathrm{kg/s}$. Ciò significa che la massa diminuisce nel tempo secondo la legge:

$$m(t) = m_0 - c\,t \tag{3}$$

- In questo caso, non essendo la massa costante, dobbiamo necessariamente applicare le leggi della dinamica nella forma scritta con la quantità di moto $p = m\,v$. Pertanto, dato che dopo il lancio da parte dell'uomo in A non esistono forze che agiscono sul sacco, la quantità di moto rimane costante nel tempo, ossia

$$\begin{aligned} p(t) &= \mathrm{cost} && (4)\\ &\Downarrow \\ m(t)v(t) &= m_0\, v_0 \\ &\Downarrow \\ (m_0 - c\,t)\, v(t) &= m_0\, v_0 && (5) \end{aligned}$$

La massa del sacco forato diminuisce nel tempo, la sua velocità *aumenta* nel tempo secondo la legge

$$v(t) = \frac{v_0}{1 - \frac{c}{m_0} t} \tag{6}$$

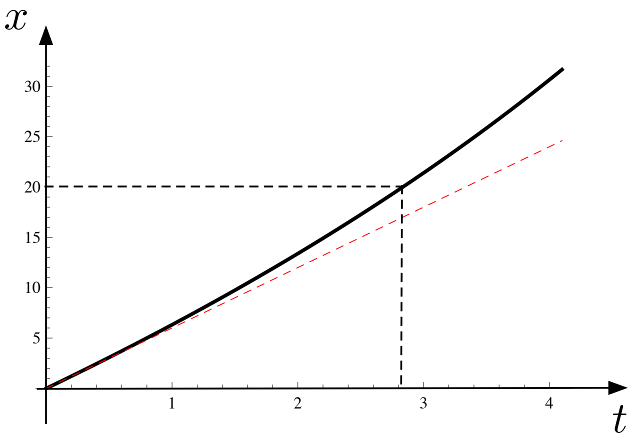
- Integrando la velocità nel tempo otteniamo la legge oraria della posizione

$$
\begin{aligned}
v = \frac{dx}{dt} &= \frac{v_0}{1-\frac{c}{m_0}t} \\
\text{[integro nel tempo]} & \Downarrow \\
\int_0^t \frac{dx}{dt'}\,dt' &= \int_0^t \frac{v_0}{1-\frac{c}{m_0}t'}\,dt' \\
\begin{matrix}\text{[a sinistra applico teorema} \\ \text{fondam. del calcolo integrale]}\end{matrix} & \Downarrow \quad \text{[a destra porto fuori la costante } v_0\text{]} \\
x(t) - \underbrace{x(0)}_{=0} &= v_0\left(-\frac{m_0}{c}\right)\ln\left(1-\frac{c}{m_0}t\right) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

e dunque la legge oraria è

$$
x(t) = -\frac{m_0 v_0}{c}\,\ln\left(1-\frac{c}{m_0}t\right) \qquad (8)
$$

che è mostrata dalla curva solida nera in figura.



Osservazione:
Dall'equazione (3) della massa, osserviamo che esiste in teoria un tempo t_s di svuotamento in cui il sacco si è completamente svuotato [$m(t_s) = 0$] pari a

$$
t_s = \frac{m_0}{c} = \frac{10\,\mathrm{kg}}{1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}} = 10\,\mathrm{s} \qquad (9)
$$

Per tempi brevi rispetto tempo di svuotamento, ossia per

$$
\frac{c}{m_0}t \ll 1 \qquad \rightarrow \qquad t \ll \frac{m_0}{c} = t_s
$$

possiamo sfruttare lo sviluppo $\ln(1-x) \simeq -x$ (valido per $|x| \ll 1$). In tal caso la legge oraria (8) si approssima a

$$
x(t) \simeq v_0 t \qquad (10)
$$

che è quella di un moto rettilineo uniforme (linea retta tratteggiata in rosso nella figura). In generale, tuttavia, l'approssimazione non è valida e la curva vera (solida nera) devia da quella rossa tratteggiata dato che la perdita di massa si fa sentire.

- Per calcolare il tempo t^* di arrivo, avremo

$$
\begin{aligned}
x(t^*) &= d \\
&\Downarrow \\
-\frac{m_0 v_0}{c} \ln\left(1 - \frac{c}{m_0} t^*\right) &= d \\
&\Downarrow \\
\ln\left(1 - \frac{c}{m_0} t^*\right) &= -\frac{c\,d}{m_0 v_0} \\
&\Downarrow \\
1 - \frac{c}{m_0} t^* &= e^{-\frac{c\,d}{m_0 v_0}} \\
&\Downarrow \\
t^* &= \frac{m_0}{c}\left(1 - e^{-\frac{c\,d}{m_0 v_0}}\right)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Sostituendo i valori

$$
\begin{aligned}
t^* &= \frac{m_0}{c}\left(1 - e^{-\frac{c\,d}{m_0 v_0}}\right) = \\
&= \frac{10\,\cancel{\mathrm{kg}}}{1\,\frac{\cancel{\mathrm{kg}}}{\mathrm{s}}}\left(1 - \exp\left(-\frac{1\,\frac{\cancel{\mathrm{kg}}}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 20\,\cancel{\mathrm{m}}}{10\,\cancel{\mathrm{kg}}\; 6\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}}}}\right)\right) = \\
&= 10\left(1 - e^{-1/3}\right)\,\mathrm{s} = \\
&= 2.83\,\mathrm{s}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Confrontando questo tempo con quello del sacco normale [vedi Eq.(2)], osserviamo dunque che il sacco forato impiega meno tempo a coprire la distanza d.

- Per trovare la velocità di arrivo sostituiamo il tempo t^* nella legge oraria (6) della velocità, ottenendo

  sfruttiamo la conservazione (4) della quantità di moto

$$
v^* = v(t^*) = \frac{v_0}{1 - \frac{c}{m_0} t^*} \tag{13}
$$

Sostituendo i valori:

$$
\begin{aligned}
v^* &= \frac{6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1 - \frac{\frac{1\cancel{\mathrm{kg}}}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2.83\,\cancel{\mathrm{s}}}{10\,\cancel{\mathrm{kg}}}} \\
&= 8.3\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

che è appunto più elevata della velocità di partenza (e anche della velocità di arrivo dei sacchi normali).