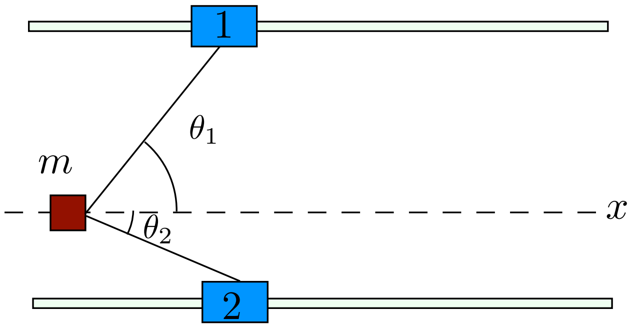
Esercizio

Un corpo di massa $m = 10\,\mathrm{kg}$, inizialmente fermo, viene trainato tramite due cavi collegati a due ganci mobili lungo l'asse x di un piano orizzontale x-y. I ganci possono scorrere orizzontalmente su due binari in modo da mantenere costanti gli angoli θ_1 e θ_2 che i cavi formano con l'asse orizzontale. Spendo che $\theta_1 = 2\theta_2$, che $\theta_2 = 30^o$ e che la tensione del primo cavo vale in modulo $T_1 = |\vec{T}_1| = 200\,\mathrm{N}$, calcolare la velocità del corpo dopo $3\,\mathrm{s}$ e determinare quanto spazio ha percorso.



SOLUZIONE

Dati noti
$m = 10\,\mathrm{kg}$
$\theta_2 = \pi/6$
$\theta_1 = \pi/3$
$T_1 = |\vec{T}_1| = 200\,\mathrm{N}$
$v(0) = 0$

- Il corpo m è soggetto alle tue tensioni $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ dei cavi. Dalla seconda legge della dinamica

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\,\vec{a} \\ &\Downarrow \\ \vec{T}_1 + \vec{T}_2 &= m\,\vec{a} \end{aligned} \tag{1}$$

- Scomponiamo tutti i vettori nelle componenti lungo $\hat{u}_x$ e $\hat{u}_x$. Indicando $T_1 = |\vec{T}_1|$ e $T_2 = |\vec{T}_2|$ e sfruttando il fatto che il moto del corpo m avviene lungo x obbiamo

$$\begin{cases} \vec{T}_1 = T_1 \cos\theta_1 \hat{u}_x + T_1 \sin\theta_1 \hat{u}_y \\ \vec{T}_2 = T_2 \cos\theta_2 \hat{u}_x - T_2 \sin\theta_2 \hat{u}_y \\ \vec{a} = a\,\hat{u}_x + 0\,\hat{u}_y \end{cases}$$

Sostituendo in (1) e raccogliendo tutti i termini che moltiplicano $\hat{u}_x$ e tutti quelli che moltiplicano $\hat{u}_y$, otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 + \vec{T}_2 &= m\,\vec{a} \\ &\Downarrow \\ T_1 \cos\theta_1 \hat{u}_x + T_1 \sin\theta_1 \hat{u}_y + T_2 \cos\theta_2 \hat{u}_x - T_2 \sin\theta_2 \hat{u}_y &= m\,(a\,\hat{u}_x + 0\,\hat{u}_y) \\ &\Downarrow \\ (T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2)\hat{u}_x + (T_1 \sin\theta_1 - T_2 \sin\theta_2)\hat{u}_y &= m\,a\,\hat{u}_x + 0\,\hat{u}_y \end{aligned} \tag{2}$$

I due vettori che compaiono nell'Eq.(2) sono uguali se e solo se le componenti corrispondenti sono uguali, si ottiene

$$\begin{cases} T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 = m\,a \\ \\ T_1 \sin\theta_1 - T_2 \sin\theta_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Questo è un sistema di due equazioni per le due incognite T_2 e a.

- Ricordando che $\theta_1 = 2\theta_2$, la seconda equazione (3) diventa

$$\begin{aligned} T_1 \sin(2\theta_2) &= T_2 \sin\theta_2 \\ &\Downarrow \\ 2T_1 \sin\theta_2\,\cos\theta_2 &= T_2 \sin\theta_2 \\ \\ &\Downarrow \\ T_2 &= 2T_1\,\cos(\theta_2) \end{aligned} \tag{4}$$

- Sostituendo (4) nella prima equazione (3) diventa

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{m}(T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2) \\
&\Downarrow \quad [\text{uso } (4)] \\
a &= \frac{1}{m}(T_1 \cos(2\theta_2) + 2T_1 \cos^2\theta_2) \\
&\Downarrow \\
a &= \frac{T_1}{m}(\cos(2\theta_2) + 2\cos^2\theta_2) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

  Utilizzando l'identità trigonometrica $\cos^2\theta_2 = (1+\cos(2\theta_2))/2$ si ottiene

$$
a = \frac{T_1}{m}(1 + 2\cos(2\theta_2)) \qquad (6)
$$

  Sostituendo i valori

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{200\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{kg}} \underbrace{(1 + 2\cos(2\,\frac{\pi}{6}))}_{=2} = \\
&\quad [\text{uso N} = \mathrm{kg\,m/s^2}] \\
&= 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

- Dato che l'accelerazione del corpo è costante, il moto del corpo è uniformemente accelerato. Partendo da fermo, e fissando l'origine $x = 0$ nel punto di partenza, la legge oraria del corpo vale

$$
x(t) = \frac{1}{2} a\, t^2 \qquad (8)
$$

  e la legge oraria della velocità è

$$
v(t) = a\, t \qquad (9)
$$

- Sostituendo l'istante $t = 3\,\mathrm{s}$ nelle Eq.(8) e (9) si ottiene una distanza di

$$
\begin{aligned}
d &= x(t = 3\mathrm{s}) = \frac{1}{2}\, 40\, \frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}\, (3\cancel{\mathrm{s}})^2 = \\
&= 180\,\mathrm{m} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

  ed una velocità

$$
\begin{aligned}
v^* &= v(t = 3\mathrm{s}) = 40\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\cancel{2}}}\, 3\cancel{\mathrm{s}} = \\
&= 120\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (11)
\end{aligned}
$$