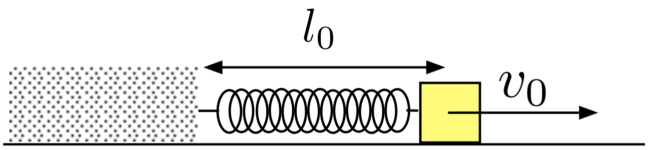
Esercizio

Un corpo di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$, attaccato all'estremo destro di una molla di costante elastica $k = 100\,\mathrm{N/m}$, si trova all'istante $t = 0$ al punto di equilibrio della molla, con velocità iniziale $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$. Calcolare:

1. la legge oraria del corpo;
2. l'andamento temporale della forza elastica della molla;
3. l'elongazione massima della molla;
4. l'impulso della forza elastica tra l'istante $t = 0$ e l'istante della prima elongazione massima a destra.



SOLUZIONE

Dati noti
$m = 1\,\mathrm{kg}$
$k = 100\,\mathrm{N/m}$
$v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$

Scegliamo come origine dell'asse x la posizione di equilibrio della molla. Pertanto l'allungamento della molla vale $\Delta l = x$ e la posizione iniziale del corpo

$$x(0) = 0 \tag{1}$$

1. Troviamo anzitutto la legge oraria:

   - Dalla forza elastica della molla

     $$\begin{array}{rcl} F_{el} & = & m\,a \\ & \Downarrow & \\ -k\Delta l & = & m\,a \\ {\scriptstyle [\text{uso } \Delta l = x]} & \Downarrow & \\ -\dfrac{k}{m}x & = & a \end{array} \tag{2}$$

     Indicando

     $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

     e ricordando che $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ abbiamo che l'equazione che la legge oraria $x(t)$ deve soddisfare è

     $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \tag{4}$$

     che è l'equazione di un moto armonico con centro nell'origine.

   - Sappiamo che la soluzione dell'Eq.(4)

     $$x(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \tag{5}$$

     e la corrispondente velocità

     $$v(t) = -C\omega\sin(\omega t) + D\omega\cos(\omega t) \tag{6}$$

     Le costanti C e D sono da determinarsi in base alle condizioni iniziali

     $$\left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 0 \\ v(0) & = & v_0 \end{array} \right. \tag{7}$$

     Sostituendo nell'Eq.(5) e (6) abbiamo

     $$\left\{ \begin{array}{rcl} C & = & x(0) = 0 \\ D\omega & = & v_0 \end{array} \right. \tag{8}$$

e dunque

$$\begin{cases} C & = & 0 \\ D & = & \dfrac{v_0}{\omega} \end{cases} \tag{9}$$

Pertanto la legge oraria di posizione (5) è

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \tag{10}$$

e quella della velocità (6) è

$$v(t) = v_0\cos(\omega t) \tag{11}$$

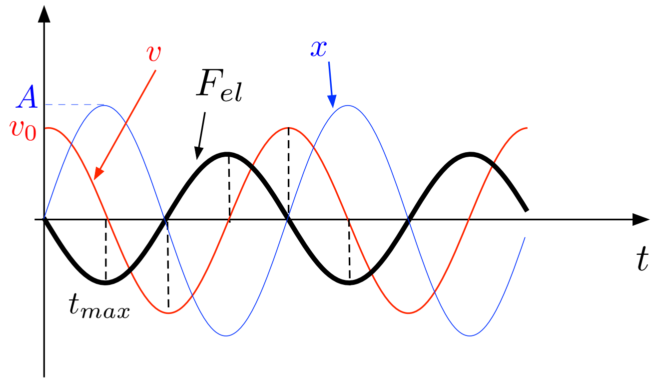
2. A questo punto possiamo trovare l'accelerazione

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -v_0\omega\sin(\omega t) \tag{12}$$

e la forza $F(t) = ma(t)$

$$F_{el}(t) = ma(t) = -mv_0\omega\sin(\omega t) \tag{13}$$

che è disegnata in figura (curva nera spessa).



3. Come si vede dalla legge oraria (10) l'elongazione massima a destra si ottiene quando il sin assume il valore massimo +1, mentre l'elongazione massima a sinistra si ottiene quando il sin assume il valore minimo -1. Pertanto dalla (10) ricaviamo che l'elongazione massima (in valore assoluto) è

$$A = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{14}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} A &= 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{\frac{1\,\mathrm{kg}}{100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = \\ &\quad [\text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}] \\ &= \frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}}\sqrt{\frac{1\,\cancel{\mathrm{kg}}}{100\,\frac{\cancel{\mathrm{kg}}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}}} = \\ &= 0.50\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{15}$$

4. Per calcolare l'impulso procediamo in questo modo:

- **Osservazione**
Dall'eq.(10) notiamo che l'elongazione massima (ad esempio a destra) avviene all'istante
$$t_{max} = \frac{\pi}{2\omega} \tag{16}$$
che è quello che rende sin = +1. Ovviamente tale istante corrisponde al punto di inversione del verso del moto, e dunque all'istante in cui la velocità si annulla, come si vede facilmente sostituendo l'Eq.(16) nella legge oraria (11) della velocità. Al tempo stesso tale istante corrisponde anche al *massimo* (in valore assoluto) dell'accelerazione, come è ovvio che sia dato che la forza elastica è massima (in valore assoluto) proprio quando l'allugamento è massimo. Inoltre nel moto armonico la posizione e l'accelerazione soddisfano, istante per istante, la relazione $a(t) = -\omega^2 x(t)$ [vedi Eq.(4)]: Il massimo di x (in valore assoluto) corrisponde necessariamente al massimo di a (in valore assoluto).

NOTA BENE: Negli istanti in cui la velocità è massima (in valore assoluto) l'accelerazione e la forza *sono nulle* !

- L'impulso della forza elastica è dato dall'integrale dal tempo $t = 0$ al tempo t_{max} di elongazione massima
$$J = \int_0^{t_{max}} F_{el}(t)\, dt \tag{17}$$
e per calcolarlo possiamo procedere in due modi equivalenti:
(a) **Primo modo: calcolo diretto**
Sostituendo la (13) nella definizione (17) abbiamo
$$\begin{aligned} J &= \int_0^{t_{max}} F_{el}(t)\, dt = \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} m v_0 \omega \sin(\omega t)\, dt = \\ &= -m v_0 \omega \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin(\omega t)\, dt = \\ &= m v_0 \cos(\omega t)\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2\omega}} \end{aligned} \tag{18}$$
Pertanto
$$J = -m v_0 \tag{19}$$
Sostituendo i valori:
$$J = -1\,\mathrm{kg} \cdot 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -5\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}} \tag{20}$$
(b) **Secondo modo: teorema dell'impulso**
Sfruttiamo il teorema dell'impulso e abbiamo
$$J = \int_0^{t_{max}} F_{el}(t)\, dt = p(t_{max}) - p(0) \tag{21}$$
dove
$$\begin{aligned} p(t_{max}) &= m v(t_{max}) = 0 \\ p(0) &= m v_0 \end{aligned} \tag{22}$$
e dunque
$$J = -m v_0 \tag{23}$$
come sopra.