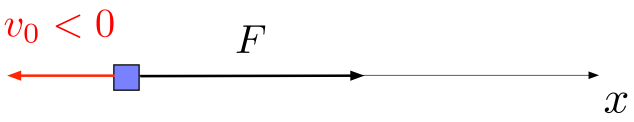
Esercizio

Ad un corpo di massa $m = 5\,\text{kg}$ che si muove lungo l'asse x, inizialmente situato nell'origine e diretto verso sinistra con velocità $v_0 = -3\text{m/s}$, viene applicata tramite una fune una forza F diretta verso destra. La forza aumenta nel tempo secondo la legge $F(t) = c\,t$, con $c = 8\,\text{N/s}$. La fune viene tagliata non appena il corpo raggiunge la velocità $v^* = +8\,\text{m/s}$. Calcolare:

1. l'istante t^* in cui viene tagliata la fune;
2. la legge oraria della velocità del corpo;
3. la legge oraria della posizione del corpo;
4. la quantità di moto del corpo all'istante in cui ripassa dall'origine muovendosi verso destra.



SOLUZIONE

Dati noti
$x(0) = 0$;
$v(0) = v_0 = -3\text{m/s}$
$m = 5\,\text{kg}$
$F(t) = c\,t$
$c = 8\,\text{N/s}$
$v^* = +8\,\text{m/s}$

1. L'istante t^* in cui viene tagliata la fune è caratterizzato dal fatto che la velocità del corpo assume il valore v^*. Pertanto occorre prima trovare la legge oraria della velocità

   - Dalla seconda legge della dinamica (il moto avviene tutto lungo x) abbiamo

     $$F = ma \tag{1}$$

     e dunque

     $$a(t) = \frac{F}{m} = \frac{c\,t}{m} \tag{2}$$

   - Integrando l'equazione dall'istante 0 ad un instante generico t abbiamo

     $$\begin{aligned} \int_0^t a(t')\,dt' &= \int_0^t \frac{c\,t'}{m}\,dt' \\ \text{[uso la def. di accelerazione } a = \tfrac{dv}{dt}\text{]} \quad &\Downarrow \\ \int_0^t \frac{dv}{dt'}\,dt' &= \frac{c}{m}\int_0^t t'\,dt' \\ \text{[uso teorema fondam. del calcolo integrale]} \quad &\Downarrow \\ v(t) - v(0) &= \frac{c}{2m}t^2 \end{aligned}$$

     Pertanto, ricordando che $v(0) = v_0$, si ottiene

     $$v(t) = v_0 + \frac{c}{2m}t^2 \tag{3}$$

   - L'istante t^* in cui la velocità diventa pari a $v^* = +8\,\text{m/s}$ è dunque dato da

     $$\begin{aligned} v^* &= v(t^*) \\ &\Downarrow \\ v^* &= v_0 + \frac{c}{2m}t^{*2} \\ &\Downarrow \\ t^* &= \sqrt{\frac{2m}{c}(v^* - v_0)} \end{aligned} \tag{4}$$

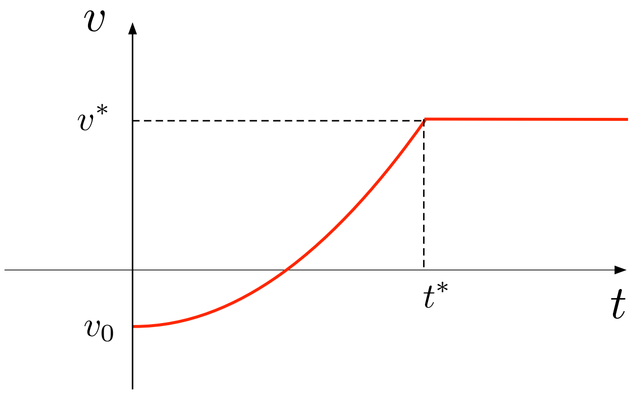
Sostituendo i valori otteniamo

$$
\begin{aligned}
t^* &= \sqrt{\frac{2 \cdot 5\,\mathrm{kg}}{8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}}(8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - (-3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}))} = \\
& [\text{uso N} = \mathrm{kg\,m/s^2}] \\
&= \sqrt{\frac{10\,\cancel{\mathrm{kg}}}{8\,\frac{\cancel{\mathrm{kg}}\,\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^3}} \cdot 11\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}} = \\
&= \sqrt{13.75\,\mathrm{s}^2} = \\
&= 3.7\,\mathrm{s}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

2. La legge oraria della velocità è data dalla (3) per gli istanti fino a t^*. Dopo l'istante t^* la fune viene tagliata e, per la prima legge della dinamica, il corpo prosegue viaggiando di moto rettilineo uniforme con velocità costante e pari a v^*. La legge oraria della velocità vale

$$
v(t) = \begin{cases} v_0 + \frac{c}{2m} t^2 & \text{per} \quad 0 \leq t \leq t^* \\[2ex] v^* = \text{cost} & \text{per} \quad t \geq t^* \end{cases}
\tag{6}
$$

ed è disegnata in figura.



3. La legge oraria della posizione si ricava integrando nel tempo la legge oraria (6) della velocità. Dobbiamo allora distinguere due casi

   (a) intervallo $0 \leq t \leq t^*$

$$
\begin{aligned}
\int_0^t v(t')\,dt' &= \int_0^t (v_0 + \frac{c}{2m} t'^2)\,dt' \\
[\text{uso la def. di velocità } v = \tfrac{dx}{dt}] & \Downarrow \\
\int_0^t \frac{dx}{dt'}\,dt' &= v_0 \int_0^t dt' + \frac{c}{2m} \int_0^t t'^2\,dt' \\
[\text{uso teorema fondam. del calcolo integrale}] & \Downarrow \\
x(t) - \underbrace{x(0)}_{=0} &= v_0 t + \frac{c}{6m} t^3
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
x(t) = v_0 t + \frac{c}{6m} t^3 \tag{7}
$$

con $v_0 < 0$, come disegnato in figura.
In particolare osserviamo che la posizione all'istante t^* vale

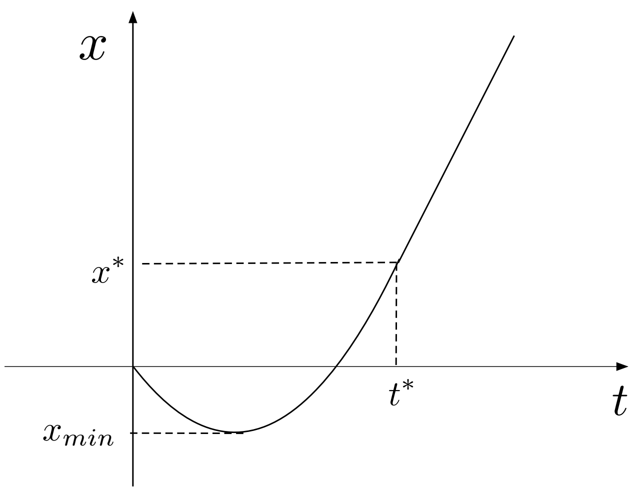
$$x^* = x(t^*) = v_0 t^* + \frac{c}{6m} t^{*3} \tag{8}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} x^* &= -3\,\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}}\,3.7\,\cancel{\mathrm{s}} + \frac{8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}}{6\cdot 5\,\mathrm{kg}}(3.7\,\mathrm{s})^3 = \\ & \quad [\text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}] \\ &= -11.1\,\mathrm{m} + \frac{8}{30\,\cancel{\mathrm{kg}}}\frac{\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^3}}\;50.65\,\cancel{\mathrm{s}^3} = \\ &= -11.1\,\mathrm{m} + 13.51\,\mathrm{m} = \\ &= 2.40\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{9}$$

(b) $t \geq t^*$. In questo intervallo si tratta di un moto rettilineo uniforme. Sapendo che all'istante t^* la particella si trova in x^*, la legge oraria di tale moto si scrive

$$x(t) = x^* + v^*(t - t^*) \tag{10}$$



Quindi la legge oraria della posizione vale

$$x(t) = \begin{cases} v_0 t + \frac{c}{6m} t^3 & \text{per } \; 0 \leq t \leq t^* \\ \\ x^* + v^*(t - t^*) & \text{per } \; t \geq t^* \end{cases} \tag{11}$$

ed è disegnata in figura.

4. Per trovare la quantità di moto all'istante in cui ripassa ad $x = 0$, occorre anzitutto determinare tale istante.

   - Osservo innanzitutto che, siccome all'istante t^* in cui la fune viene tagliata la posizione della particella è $x^* > 0$ [vedi Eq.(9)], il passaggio del corpo dall'origine avviene prima,

ossia quando la fune è ancora presente e cioè quando la legge oraria della posizione e della velocità sono ancora date da (7) e (3).
Indicando con $\bar{t}$ l'istante di ripassaggio dall'origine, esso è caratterizzato dal fatto che

$$\begin{aligned}
x(\bar{t}) &= 0 \\
&\Downarrow \\
v_0\bar{t} + \frac{c}{6m}\bar{t}^3 &= 0 \\
&\Downarrow \\
\bar{t}\left(v_0 + \frac{c}{6m}\bar{t}^2\right) &= 0 \\
&\Downarrow \\
\bar{t} &= \begin{cases} 0 \\ -\sqrt{-\frac{6mv_0}{c}} \\ +\sqrt{-\frac{6mv_0}{c}} \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

le cui prime due soluzioni sono da scartare. Pertanto

$$\bar{t} = \sqrt{-\frac{6mv_0}{c}} \tag{13}$$

e, sostituendo i valori, si ottiene

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= \sqrt{-\frac{6 \cdot 5\,\mathrm{kg}\,(-3\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}})}{8\,\frac{\mathrm{N}}{\cancel{\mathrm{s}}}}} \\
&= \sqrt{11.25\frac{\mathrm{kg\,m}}{\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}} \\
&= 3.35\,\mathrm{s}
\end{aligned} \tag{14}$$

- La quantità di moto a tale istante è allora data da

$$p = mv(\bar{t}) = m(v_0 + \frac{c}{2m}\bar{t}^2) = mv_0 + \frac{c}{2}\bar{t}^2 \tag{15}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned}
p &= 5\,\mathrm{kg}\,(-3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) + \frac{8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}}{2}(3.35\,\mathrm{s})^2 = \\
&\quad [\text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}] \\
&= -15\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}} + 45\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}} = \\
&= 30\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned} \tag{16}$$