Esercizio (tratto dal Problema 1.18 del Mazzoldi)

Un uomo vuole attraversare a nuoto un fiume di larghezza $L = 20\,\mathrm{m}$, partendo dal punto A e puntando in direzione normale alle sponde. Relativamente all'acqua, la velocità di spostamento dell'uomo è costante e pari a $v_y = 3.6\,\mathrm{km/h}$. Se la velocità dell'acqua del fiume varia con la distanza y dalla sponda di partenza secondo la legge $v_x(y) = \lambda y(L - y)$ con $\lambda = 5 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$, si determini

1. il tempo impiegato ad attraversare il fiume;
2. il punto di arrivo B;

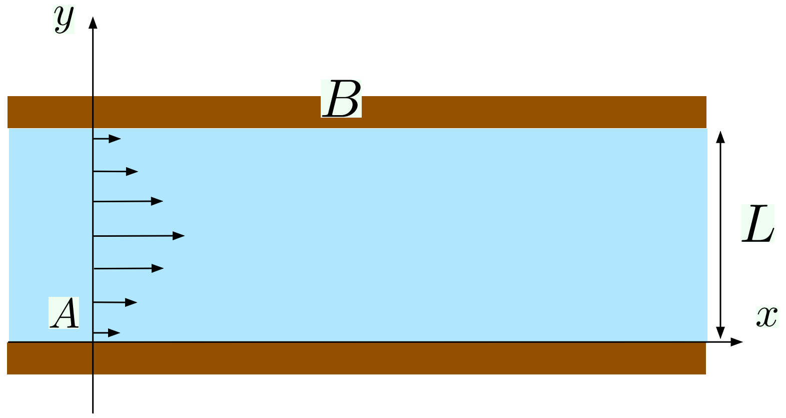

Figure 1: L'uomo parte da A e vuole attraversare il fiume.

SOLUZIONE

DATI NOTI

$$
\begin{aligned}
v_y &= 3.6\,\mathrm{km/h} = 3.6 \cdot \tfrac{1000\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{m/s} \\
\lambda &= 5 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^{-1} \\
L &= 20\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

1. La velocità dell'uomo, rispetto al sistema inerziale delle sponde, è data dalla composizione del moto lungo y (a velocità costante) e del moto lungo x (a velocità variabile che dipende dalla coordinata y)
$$\vec{v} = (v_x(y), v_y) \tag{1}$$

2. Siccome il moto lungo y è un moto rettilineo uniforme, la legge oraria lungo y vale
$$y(t) = v_y\, t \tag{2}$$
e dunque il tempo t_B in cui l'uomo raggiunge l'altra sponda (punto B) è dato da
$$
\begin{aligned}
y(t_B) &= L \\
&\Downarrow \\
v_y\, t_B &= L
\end{aligned} \tag{3}
$$
da cui
$$t_B = \frac{L}{v_y} \tag{4}$$
Sostituendo i valori si ottiene
$$t_B = \frac{20\,\cancel{\mathrm{m}}}{1\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}} = 20\,\mathrm{s} \tag{5}$$

3. Consideriamo ora il moto lungo x. Per ottenere lo spazio percorso, consideriamo la definizione di velocità
$$\int_0^{t_B} v_x(t)\,dt = \underbrace{x(t_B)}_{x_B} - \underbrace{x(0)}_{=0} \tag{6}$$
da cui
$$x_B = \int_0^{t_B} v_x(t)\,dt \tag{7}$$
Osserviamo che abbiamo la velocità v_x in funzione dell'altezza y
$$v_x(y) = \lambda\, y(L-y) \tag{8}$$
Per ottenere la $v_x(t)$ sfruttiamo la legge oraria (2) lungo y, e la sostituiamo nella (8), ottenendo
$$v_x(t) = \lambda\, v_y t(L - v_y t) \tag{9}$$

Ora, sostituendo la (9) nella (7) si ottiene

$$\begin{aligned} x_B &= \int_0^{t_B} v_x(t)\,dt = \\ &= \int_0^{t_B} \lambda\, v_y t(L - v_y t)\,dt = \\ &= \lambda\, v_y \int_0^{t_B} (tL - v_y t^2)\,dt = \\ &= \lambda\, v_y \left(\frac{t_B^2}{2} L - v_y \frac{t_B^3}{3} \right) \end{aligned} \tag{10}$$

Sostituendo la (4) nella (10) otteniamo

$$\begin{aligned} x_B &= \lambda\, v_y \left(\frac{L^2}{2v_y^2} L - v_y \frac{L^3}{3v_y^3} \right) = \\ &= \lambda\, \frac{L^3}{v_y} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \end{aligned} \tag{11}$$

ossia

$$x_B = \lambda\, \frac{L^3}{6v_y} \tag{12}$$

Sostituendo i valori si ottiene la coordinata x_B del punto B di arrivo

$$\begin{aligned} x_B &= 5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\mathrm{m}\,\cancel{\mathrm{s}}} \frac{(20\,\mathrm{m})^3}{6 \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}}} = \\ &= 6.67\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{13}$$

mentre la coordinata y_B vale ovviamente $y_B = 20\,\mathrm{m}$.