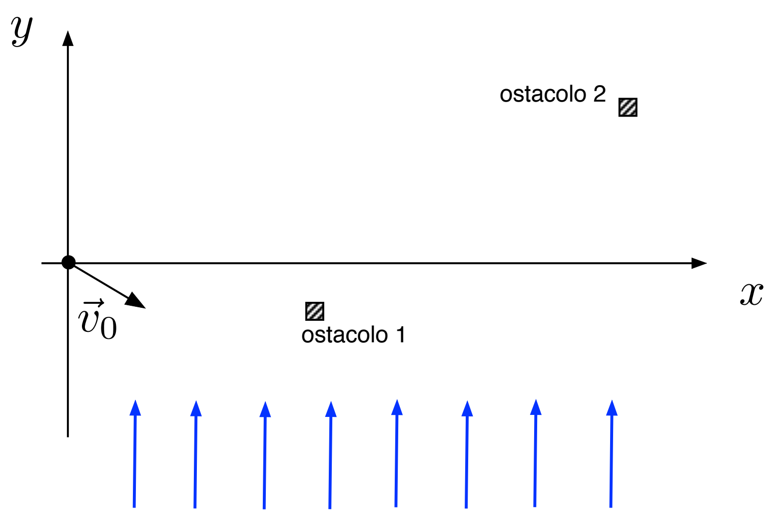
Esercizio

Una pallina si muove sul piano orizzontale xy. All'istante $t = 0$ viene sparata dall'origine con velocità $\vec{v}_0 = (3\,\hat{u}_x - 2\,\hat{u}_y)$m/s. Sul piano viene inviato un getto di aria compressa diretto lungo la direzione y che imprime alla pallina un'accelerazione che varia nel tempo come $\vec{a}(t) = \gamma t\,\hat{u}_y$ con $\gamma = 2\,\text{m/s}^3$. Sul piano sono anche posti due ostacoli fissi nelle posizioni $\vec{R}_1 = (4\hat{u}_x - \hat{u}_y)$m e $\vec{R}_2 = (9\hat{u}_x + 3\hat{u}_y)$m. Determinare:

1. la legge oraria della velocità $\vec{v}$
2. la legge oraria della posizione $\vec{r}$
3. l'equazione cartesiana $y = y(x)$ della traiettoria della pallina sul piano
4. la pallina urta uno dei due ostacoli durante la traiettoria? In caso affermativo, stabilire a quale istante avviene l'impatto



Fabrizio Dolcini (http://staff.polito.it/fabrizio.dolcini/)
Dipartimento di Scienza Applicata e Tecnologia, Politecnico di Torino - Esercitazioni di Fisica I

SOLUZIONE

DATI NOTI
$\vec{v}_0 = (3\,\hat{u}_x - 2\,\hat{u}_y)\mathrm{m/s}$
$\vec{a}(t) = \gamma\, t\, \hat{u}_y$
$\gamma = 2\,\mathrm{m/s}^3$
$\vec{R}_1 = (4\hat{u}_x - \hat{u}_y)\mathrm{m}$
$\vec{R}_2 = (9\hat{u}_x + 3\hat{u}_y)\mathrm{m}$

1. **Legge oraria della velocità**
Per trovare la legge oraria della velocità dobbiamo risolvere l'equazione

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{a} \qquad\qquad \text{per i vettori} \quad \begin{cases} \vec{v} = v_x\,\hat{u}_x + v_y\,\hat{u}_y \\ \vec{a} = a_x\,\hat{u}_x + a_y\,\hat{u}_y \end{cases} \\ &\Downarrow \\ \frac{dv_x}{dt}\,\hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{u}_y &= a_x\,\hat{u}_x + a_y\,\hat{u}_y \end{aligned} \tag{1}$$

Uguagliando componente per componente, e tenendo conto che

$$\vec{a}(t) = \gamma\, t\, \hat{u}_y \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \gamma\, t \end{cases}$$

otteniamo che l'equazione vettoriale (1) è equivalente alle due equazioni per le due componenti

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = a_x = 0 \\ \\ \dfrac{dv_y}{dt} = a_y = \gamma\, t \end{cases} \tag{2}$$

Risolviamo ora queste due equazioni

- **legge oraria della velocità lungo** x

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = \mathrm{cost} = \underbrace{v_x(0)}_{v_{0x}} \tag{3}$$

- **legge oraria della velocità lungo** y

$$\frac{dv_y}{dt} = \gamma\, t \quad \Rightarrow \quad v_y(t) = \int_0^t \gamma\, t'\, dt' + \underbrace{v_y(0)}_{v_{0y}} \tag{4}$$

da cui otteniamo

$$v_y(t) = v_{0y} + \frac{1}{2}\gamma t^2 \tag{5}$$

Pertanto la legge oraria della velocità vale

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{u}_x + v_y(t)\,\hat{u}_y \quad \text{con} \quad \boxed{\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ \\ v_y(t) = v_{0y} + \frac{1}{2}\gamma t^2 \end{cases}} \tag{6}$$

dove le componenti iniziali v_{0x} e v_{0y} della velocità e la costante γ sono date da

$$\vec{v}(0) = (3\,\hat{u}_x - 2\,\hat{u}_y)\mathrm{m/s} \rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 3\,\mathrm{m/s} \\ v_{0y} = -2\,\mathrm{m/s} \end{cases} \qquad\qquad \gamma = 2\,\mathrm{m/s}^3$$

2. **Legge oraria della posizione**
Per trovare la legge oraria della posizione dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \qquad \text{per i vettori} \quad \begin{cases} \vec{r} = x\,\hat{u}_x + y\,\hat{u}_y \\ \vec{v} = v_x\,\hat{u}_x + v_y\,\hat{u}_y \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dx}{dt}\,\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\,\hat{u}_y = v_x\,\hat{u}_x + v_y\,\hat{u}_y \tag{7}$$

Uguagliando componente per componente, e tenendo conto della legge oraria della velocità trovata in precedenza,

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} + \frac{1}{2}\gamma t^2 \end{cases}$$

l'equazione vettoriale (7) è equivalente alle due equazioni per le due componenti

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x = v_{0x} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y = v_{0y} + \dfrac{1}{2}\gamma t^2 \end{cases} \tag{8}$$

- **legge oraria della velocità lungo** x

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_0^t v_{0x}\,dt \; + \underbrace{x(0)}_{=0} \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_{0x}\,t \tag{9}$$

- **legge oraria della velocità lungo** y

$$\frac{dy}{dt} = \gamma\,t \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int_0^t \left(v_{0y} + \frac{1}{2}\gamma t'^2 \right) dt' \; + \underbrace{y(0)}_{=0} \tag{10}$$

da cui otteniamo

$$y(t) = v_{0y}\,t + \frac{1}{6}\gamma t^3 \tag{11}$$

Pertanto la legge oraria della posizione vale

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{u}_x + y(t)\,\hat{u}_y \qquad \text{con} \qquad \boxed{\begin{cases} x(t) = v_{0x}\,t \\ \\ y(t) = v_{0y}\,t + \frac{1}{6}\gamma t^3 \end{cases}} \tag{12}$$

Sostituendo le componenti iniziali v_{0x} e v_{0y} della velocità e la costante γ, date da

$$\vec{v}(0) = (3\,\hat{u}_x - 2\,\hat{u}_y)\mathrm{m/s} \rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 3\,\mathrm{m/s} \\ v_{0y} = -2\,\mathrm{m/s} \end{cases} \qquad \gamma = 2\,\mathrm{m/s^3} \quad ,$$

si ottiene

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{u}_x + y(t)\,\hat{u}_y \qquad \text{con} \qquad \boxed{\begin{cases} x(t) = 3t\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ \\ y(t) = -2t\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \frac{1}{3}t^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^3}} \end{cases}} \tag{13}$$

3. **Equazione cartesiana della traiettoria**
La legge oraria (12) esprime le componenti x e y della posizione in forma parametrica nel tempo t.

Per trovare la forma cartesiana $y = y(x)$ possiamo ricavare il tempo t in funzione di x dalla prima equazione, e sostituirlo nella seconda equazione

$$\begin{aligned} x = v_{0x}\,t \quad &\rightarrow \quad t \;=\; \tfrac{x}{v_{0x}} \\ &\hookrightarrow \quad y = v_{0y}\,t + \tfrac{1}{6}\gamma t^3 \;=\; v_{0y}\,\tfrac{x}{v_{0x}} + \tfrac{1}{6}\gamma\left(\tfrac{x}{v_{0x}}\right)^3 \end{aligned} \tag{14}$$

In conclusione

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\,x + \frac{\gamma}{6v_{0x}^3}x^3 \tag{15}$$

Sostituendo i valori $v_{0x} = 3\,\mathrm{m/s}$ e $\gamma = 2\,\mathrm{m/s^3}$ otteniamo

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}\,x + \frac{1}{81\,\mathrm{m}^2}x^3} \tag{16}$$

che è dunque una legge cubica (mostrata in figura), con un minimo in

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{2}{3} + \frac{x^2}{27\,\mathrm{m}^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{18}\,\mathrm{m} \simeq 4.24\,\mathrm{m} \tag{17}$$

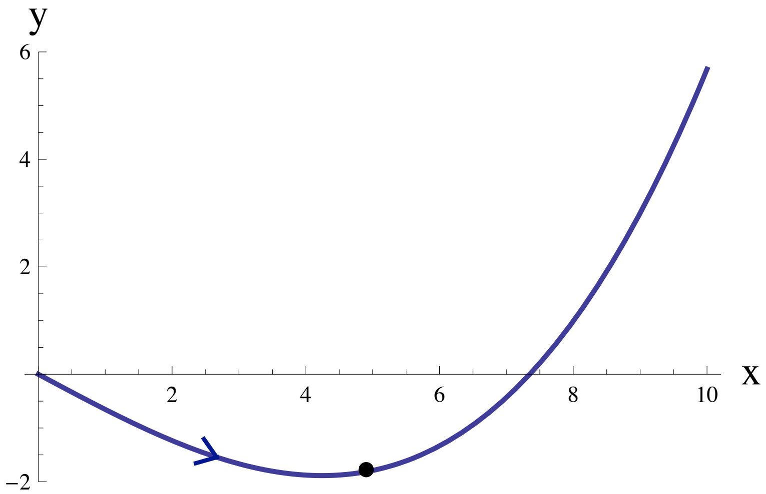


Figure 1: La traiettoria della pallina sul piano.

4. **Urto con gli ostacoli**
   Per verificare se la pallina urta gli ostacoli, basta verificare se gli ostacoli si trovano sulla traiettoria della pallina. Avendo determinato l'equazione cartesiana (16) della traiettoria, occorre vedere se le coordinate degli ostacoli soddisfano tale equazione.

   - **ostacolo 1**
   $$\vec{R}_1 = (4\,\hat{u}_x - 1\,\hat{u}_y)\mathrm{m} \to \begin{cases} X_1 = 4\,\mathrm{m} \\ \\ Y_1 = -1\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{18}$$
   Ci chiediamo dunque se
   $$\begin{array}{rcl} Y_1 & ?\!=\!? & -\dfrac{2}{3}X_1 + \dfrac{1}{81\,\mathrm{m}^2}X_1^3 \\ & \Downarrow & \\ -1\,\mathrm{m} & ?\!=\!? & -\dfrac{2}{3}4\,\mathrm{m} + \dfrac{1}{81\,\mathrm{m}^2}(4\,\mathrm{m})^3 \\ & \Downarrow & \\ -1\,\cancel{\mathrm{m}} & ?\!=\!? & \left(-\dfrac{8}{3} + \dfrac{64}{81}\right)\cancel{\mathrm{m}} \\ & \Downarrow & \\ -1 & ?\!=\!? & \dfrac{-216+64}{81} \\ & \Downarrow & \\ -1 & ?\!=\!? & -\dfrac{152}{81} \qquad \text{NO} \end{array}$$
   Dunque la pallina non urta il primo ostacolo.

   - **ostacolo 2**
   $$\vec{R}_2 = (9\,\hat{u}_x + 3\,\hat{u}_y)\mathrm{m} \to \begin{cases} X_2 = 9\,\mathrm{m} \\ \\ Y_2 = 3\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{19}$$
   Ci chiediamo dunque se
   $$\begin{array}{rcl} Y_2 & ?\!=\!? & -\dfrac{2}{3}X_2 + \dfrac{1}{81\,\mathrm{m}^2}X_2^3 \\ & \Downarrow & \\ 3\,\mathrm{m} & ?\!=\!? & -\dfrac{2}{3}9\,\mathrm{m} + \dfrac{1}{81\,\mathrm{m}^2}(9\,\mathrm{m})^3 \\ & \Downarrow & \\ 3\,\cancel{\mathrm{m}} & ?\!=\!? & \left(-6 + \dfrac{3^6}{3^4}\right)\cancel{\mathrm{m}} \\ & \Downarrow & \\ 3 & ?\!=\!? & -6+9 \\ & \Downarrow & \\ 3 & ?\!=\!? & 3 \qquad \text{SÌ} \end{array}$$
   Pertanto la pallina urta il secondo ostacolo (vedi Fig.2).

   Per determinare *quando* lo urta, possiamo sfruttare la legge oraria (13) trovata in precedenza. È sufficiente determinare, ad esempio, in quale istante la coordinata x della pallina

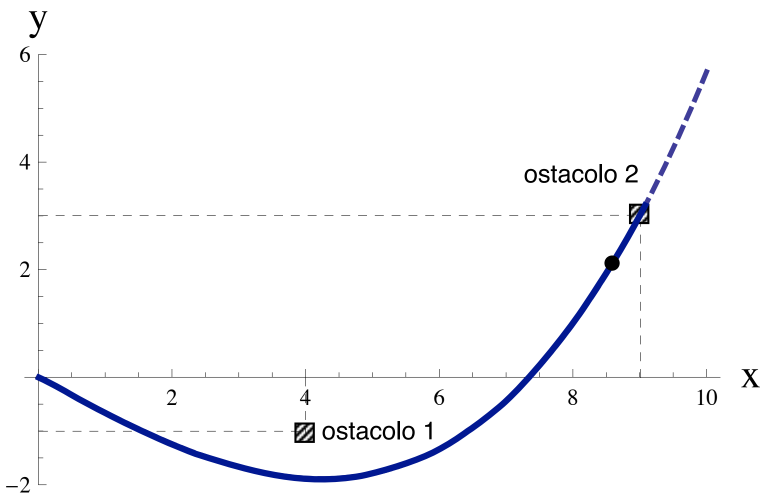


Figure 2: La pallina evita il primo ostacolo, ma urta il secondo.

assume il valore $X_2 = 9\,\mathrm{m}$. Dalla prima equazione delle (13) si vede subito che ciò avviene all'istante

$$t = 3\,\mathrm{s} \qquad \rightarrow \qquad x(t = 3\mathrm{s}) = 3 \cdot 3\cancel{\mathrm{s}}\,\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}} = 9\,\mathrm{m} = X_2 \tag{20}$$

Dunque la pallina urta l'ostacolo 2 all'istante $t = 3\,\mathrm{s}$.