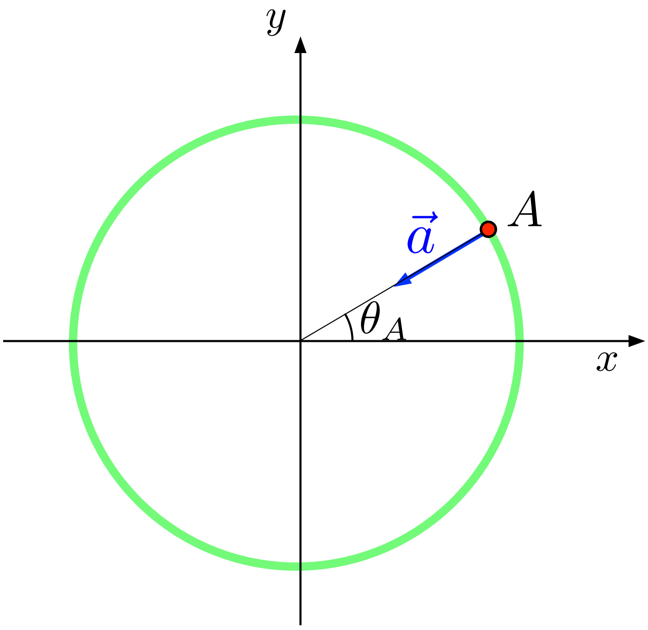
Esercizio

Una particella si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza di raggio $R = 20\,\mathrm{cm}$, in senso antiorario, sul piano xy. All'istante $t = 0$ la particella si trova nel punto A del quadrante superiore destro che ha coordinata $y_A = R/2$, ed ha l'accelerazione radiale di modulo $|a_r| = 0.8\,\mathrm{m/s^2}$. Determinare e disegnare le seguenti quantità all'istante $t^* = 1.5\,\mathrm{s}$

1. il versore radiale $\hat{u}_r$;
2. il versore trasverso $\hat{u}_\theta$;
3. la velocità;
4. l'accelerazione.

SOLUZIONE:

DATI NOTI
$R = 0.2\,\mathrm{m}$;
$y(t=0) = \frac{R}{2}$;
$x(t=0) > 0$;
$|a_r| = 0.8\,\mathrm{m/s^2}$;
$t^* = 1.5\,\mathrm{s}$



- Dal testo sappiamo che all'istante $t = 0$ la particella si trova nel quadrante superiore destro di coordinata $y_A = R/2$. Denotiamo con θ_A l'angolo che corrisponde a tale punto A. Dato che vale

$$y_A = R \sin\theta_A = \frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_A = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_A = \frac{\pi}{6} \tag{1}$$

  si ha

$$\theta(t=0) = \theta_A = \frac{\pi}{6} \tag{2}$$

- Il testo dice anche che il moto è circolare uniforme. Siccome in un moto circolare uniforme l'accelerazione ha *solo* componente radiale centripeta (non c'è componente tangenziale), l'accelerazione in A è diretta come in figura, e vale

$$\begin{aligned} \vec{a} = a_r\,\hat{u}_r &= -\omega^2\,R\,\hat{u}_r \\ &\Downarrow \quad \text{[moltiplico scalarmente ambo i membri} \\ &\qquad \text{per } \hat{u}_r \text{ e sfrutto } \hat{u}_r \cdot \hat{u}_r = 1] \\ a_r &= -\omega^2\,R \\ &\Downarrow \\ \omega &= \sqrt{\frac{|a_r|}{R}} \end{aligned} \tag{3}$$

  dove ω vale

$$\omega = \sqrt{\frac{0.8\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2}}{0.2\,\cancel{\mathrm{m}}}} = 2\,\mathrm{s}^{-1} \tag{4}$$

ed è costante nel tempo, coerentemente col fatto che il moto è circolare uniforme.

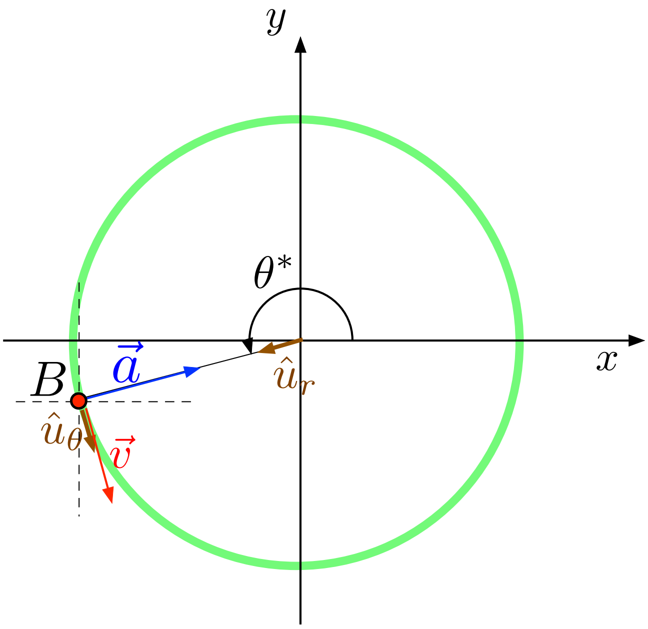
- La legge oraria angolare del moto circolare uniforme di pulsazione ω ed angolo iniziale (6) si scrive pertanto

$$\theta(t) = \theta_A + \omega\, t \tag{5}$$

Ed, in particolare, all'istante $t = t^* = 1.5$s, l'angolo vale

$$\begin{aligned} \theta^* &= \theta(t^*) = \theta_A + \omega\, t^* = \\ &= \frac{\pi}{6} + 2\,\frac{1}{\cancel{s}} \cdot 1.5\cancel{s} = \\ &= 3.52 \end{aligned} \tag{6}$$

ed identifica un punto indicato in figura con B.



- Ad ogni istante t i versori radiale a trasverso sono definiti come

$$\hat{u}_r(t) = (\cos\theta(t)\,,\, \sin\theta(t)) \tag{7}$$
$$\hat{u}_\theta(t) = (-\sin\theta(t)\,,\, \cos\theta(t)) \tag{8}$$

e dunque, all'istante t^* abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{u}_r(t^*) &= (\cos\theta(t^*)\,,\, \sin\theta(t^*)) = \\ &= (\cos(3.52)\,,\, \sin(3.52)) = \\ &= (-0.93\,,\, -0.37) \end{aligned} \tag{9}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{u}_\theta(t^*) &= (-\sin\theta(t^*)\,,\, \cos\theta(t^*)) = \\ &= (-\sin(3.52)\,,\, \cos(3.52)) = \\ &= (+0.37\,,\, -0.93) \end{aligned} \tag{10}$$

e sono disegnati in figura.

- Dato che il moto è antiorario, abbiamo che il vettore trasverso $\hat{u}_\theta$ coincide col versore tangente alla traiettoria $\hat{u}_t$, ed il vettore velocità in $t = t^*$ è dato da

$$\vec{v}^* = \omega R \, \hat{u}_\theta(t^*) \tag{11}$$

e dunque vale

$$\begin{aligned} \vec{v}^* &= 2\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0.2\,\mathrm{m}\,(\,+0.37\,,\,-0.93) = \\ &= (\,+0.15\,,\,-0.37)\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{12}$$

- Dato che il moto è circolare uniforme, l'accelerazione è sempre radiale centripeta,

$$\vec{a}^* = -\omega^2 R \, \hat{u}_r(t^*) \tag{13}$$

e dunque vale

$$\begin{aligned} \vec{a}^* &= -\left(\frac{2}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 0.2\,\mathrm{m}\,(-0.93\,,\,-0.37) = \\ &= (\,+0.74\,,\,+0.30)\,\mathrm{m/s}^2 \end{aligned} \tag{14}$$