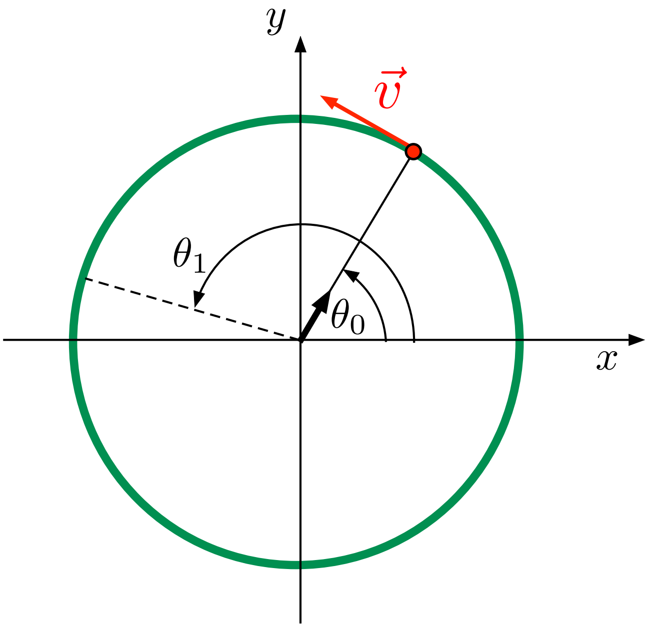
Esercizio

Una particella si muove con velocità angolare costante ω lungo una circonferenza di raggio $R = 10\,\text{cm}$, in senso antiorario, sul piano xy. Quando la particella si trova in corrispondenza dell'angolo $\theta_0 = 60^o$, la componente y della sua velocità vale $v_y = 0.015\,\text{m/s}$. Determinare:

1. il periodo del moto circolare;
2. la componente v_x della velocità alla posizione $\theta_0 = 60^o$;
3. l'accelerazione quando la particella si trova in $\theta_1 = 150^o$



SOLUZIONE:

DATI NOTI
$R = 0.1\,\mathrm{m}$;
$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$;
$v_y(\theta = \theta_0) = 0.015\,\mathrm{m/s}$;
$\theta_1 = \frac{5\pi}{6}$;

- Dal testo sappiamo che il moto è circolare uniforme con velocità angolare costante ω (ancora incognita). L'unico istante su cui abbiamo informazioni è l'istante in cui la particella si trova a $\theta_0 = \pi/3$, e conviene pertanto scegliere tale istante come origine dei tempi $t = 0$. Con tale scelta la legge oraria angolare del moto circolare uniforme si scrive

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega\, t \tag{1}$$

  dove appunto $\theta_0 = \pi/3$.

- Ad ogni istante t, le componenti x e y del vettore posizione $\vec{r}(t)$ sono date da

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & R\cos(\theta_0 + \omega\, t) \\ y(t) & = & R\sin(\theta_0 + \omega\, t) \end{array} \right. \tag{2}$$

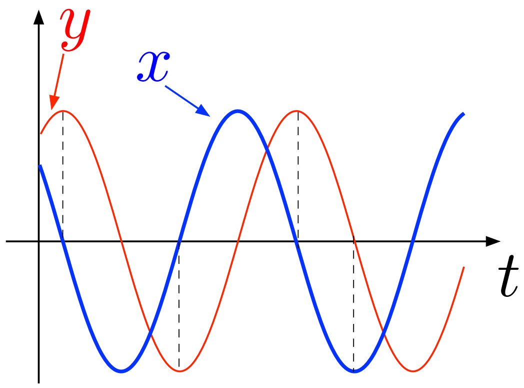
  Osservazione

  – le Equazioni (2) mostrano che i moti rettilinei ottenuti proiettando un moto *circolare uniforme* lungo gli assi x e y sono dei moti *armonici*, con:

  -ampiezza data dal raggio R della circonferenza;

  -pulsazione data dalla velocità angolare ω (costante) del moto circolare;

  -centro di oscillazione nell'origine;



  – Notiamo anche che le (2) si possono anche riscrivere

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & R\sin(\theta_0 + \omega\, t + \frac{\pi}{2}) \\ y(t) & = & R\sin(\theta_0 + \omega\, t) \end{array} \right. \tag{3}$$

  che mostra che i due moti-proiezione sono sfasati di $\pi/2$ l'uno rispetto all'altro. Ciò significa che, quando la coordinata x raggiunge l'ampiezza massima, la coordinata y è nulla e viceversa, come mostrato in figura.

- Prendendo la derivata rispetto al tempo delle leggi orarie (2) della posizione ricaviamo la legge oraria delle componenti del vettore velocità $\vec{v}(t)$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_x(t) & = & -R\omega \sin(\theta_0 + \omega\, t) \\ v_y(t) & = & R\omega \cos(\theta_0 + \omega\, t) \end{array} \right. \tag{4}$$

ed infine quelle del vettore accelerazione

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_x(t) & = & -R\omega^2 \cos(\theta_0 + \omega\, t) \\ a_y(t) & = & -R\omega^2 \sin(\theta_0 + \omega\, t) \end{array} \right. \tag{5}$$

- Dal testo sappiamo che

$$v_y(0) = 0.015\,\mathrm{m/s} \tag{6}$$

Pertanto, dalla seconda delle (4) abbiamo

$$\begin{array}{rcl} v_y(0) & = & R\omega \cos\theta_0 \\ & \Downarrow & \\ \omega & = & \dfrac{v_y(0)}{R\cos\theta_0} \end{array} \tag{7}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{array}{rcl} \omega & = & \dfrac{0.015\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}}{0.1\,\cancel{\mathrm{m}}\,\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{=1/2}} = \\ & = & 0.3\,\mathrm{s}^{-1} \end{array} \tag{8}$$

A questo punto la legge oraria ci è nota e possiamo rispondere alle varie domande:

1. Il periodo del moto circolare uniforme è dato da

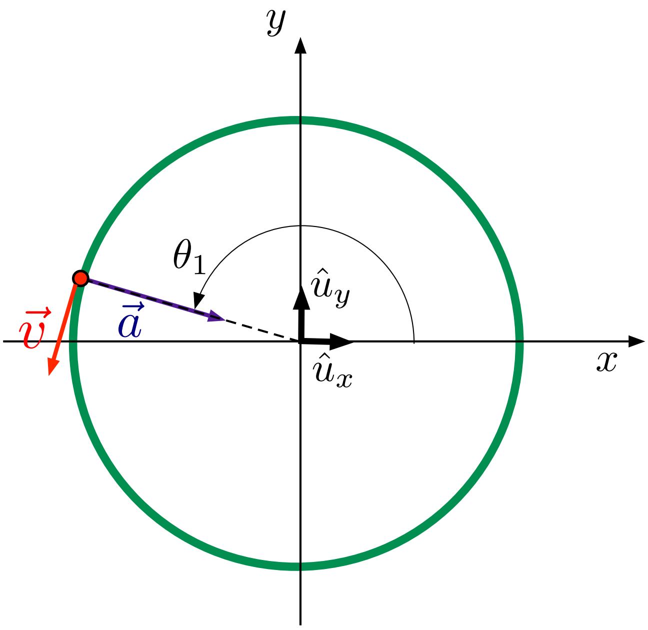
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.3\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 20.9\,\mathrm{s} \tag{9}$$

2. La componente v_x della velocità in corrispondenza dell'angolo θ_0 è data dalla prima delle (4) valutata all'istante $t = 0$,

$$\begin{array}{rcl} v_x(0) & = & -R\omega \sin\theta_0 = \\ & = & -0.1\,\mathrm{m}\,0.3\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \\ & = & -0.026\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{array} \tag{10}$$

3. Non conosciamo l'istante t_1 a cui la particella raggiunge l'angolo θ_1. Potremmo facilmente trovarlo dalla legge oraria (1)

$$\begin{array}{rcl} \theta(t_1) & = & \theta_1 \\ & \Downarrow & \\ \theta_0 + \omega\, t_1 & = & \theta_1 \\ & \Downarrow & \\ t_1 & = & \dfrac{\theta_1 - \theta_0}{\omega} \end{array} \tag{11}$$



Tuttavia osserviamo che non ci serve davvero calcolare il valore di t_1. L'unica informazione che ci serve per trovare l'accelerazione è che l'argomento di sin( ) e cos( ), ossia la fase $\theta = \theta_0 + \omega\, t$, che a tale istante vale appunto $5\pi/6$. Pertanto

$$\begin{aligned} a_x(t=t_1) &= -R\omega^2 \cos\frac{5\pi}{6} = \\ &= -0.1\,\mathrm{m}\,(0.3)^2\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \\ &= +0.0078\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{12}$$

e

$$\begin{aligned} a_y(t=t_1) &= -R\omega^2 \sin\frac{5\pi}{6} = \\ &= -0.1\,\mathrm{m}\,(0.3)^2\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,\frac{1}{2} = \\ &= -0.0045\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{13}$$

Infatti, dato che in un moto circolare *uniforme* l'accelerazione è sempre radiale centripeta, in corrispondenza dell'angolo θ_1 la sua componente a_x è positiva, mentre la componente a_y è negativa (vedi figura).