

Esercizio (tratto dal Problema 1.10 del Mazzoldi)

Considerando le lancette dei minuti e delle ore di un orologio a partire dalla posizione di mezzogiorno, si determinino le posizioni angolari in cui esse vengono a sovrapporsi, e gli istanti in cui ciò accade.

SOLUZIONE

1. Entrambe le lancette si muovono di moto circolare uniforme, con una velocità angolare tuttavia diversa.

$$\text{lancetta delle ore:} \quad \theta_h(t) = \omega_h t \quad \omega_h = \frac{2\pi}{T_h} \quad T_h = 12 \text{ h} \quad (1)$$

$$\text{lancetta minuti:} \quad \theta_m(t) = \omega_m t \quad \omega_m = \frac{2\pi}{T_m} \quad T_m = 1 \text{ h} \quad (2)$$

da cui osserviamo che

$$\frac{\omega_m}{\omega_h} = \frac{T_h}{T_m} = 12 \quad (3)$$

2. Le lancette sono sovrapposte in quegli istanti t^* per i quali vale che

$$\begin{aligned} \theta_m(t^*) &= \theta_h(t^*) + 2\pi n && \text{(differiscono al più per multipli di } 2\pi) \\ \Downarrow \\ \omega_m t^* &= \omega_h t^* + 2\pi n \\ \Downarrow \\ (\omega_m - \omega_h) t^* &= 2\pi n \end{aligned} \quad (4)$$

da cui otteniamo una sequenza di istanti:

$$t_n^* = \frac{2\pi n}{\omega_h \left(\frac{\omega_m}{\omega_h} - 1 \right)} \quad (5)$$

Utilizzando la (3) e ricordando che $T_h = \frac{2\pi}{\omega_h}$ si ottiene che le lancette si sovrappongono agli istanti

$$\boxed{t_n^* = T_h \frac{n}{11}} \quad T_h = 1 \text{ h} \quad n = 0, 1, \dots, 11 \quad (6)$$

Pertanto abbiamo

$n = 0$	$t_0^* = 0$	(7)
$n = 1$	$t_1^* = \frac{12\text{h}}{11} \simeq 1\text{h } 5\text{min } 27\text{s}$	
$n = 2$	$t_2^* = \frac{24\text{h}}{11} \simeq 2\text{h } 10\text{min } 54\text{s}$	
$n = 3$	$t_3^* = \frac{36\text{h}}{11} \simeq 3\text{h } 16\text{min } 22\text{s}$	
\dots	\dots	

3. Sostituendo t_n^* nella (1) otteniamo le posizioni angolari

$$\theta_n^* = \theta_h(t_n^*) = \omega_h t_n^* = \omega_h T_h \frac{n}{11} \quad (8)$$

e ricordando nuovamente che $T_h = \frac{2\pi}{\omega_h}$ otteniamo

$$\boxed{\theta_n^* = 2\pi \frac{n}{11}} \quad n = 0, 1, \dots, 11 \quad (9)$$

e sono mostrate in figura 1.

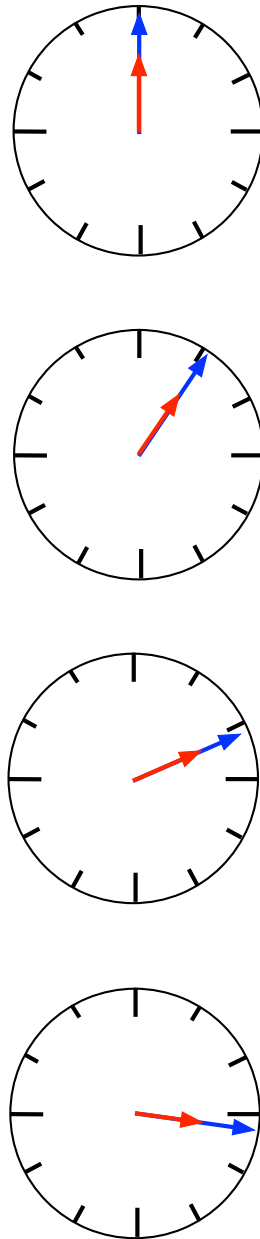


Figure 1: Le prime quattro posizioni angolari in cui le lancette sono sovrapposte.