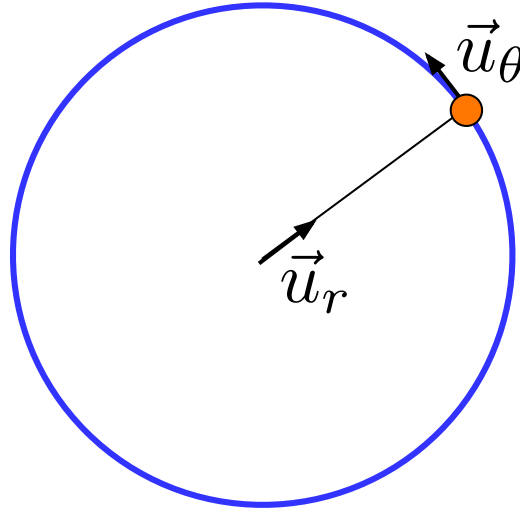


Esercizio (tratto dal Problema 2.10 del Mazzoldi 2)

Un punto materiale si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 15$ cm, in senso antiorario. A partire dall'istante $t = 0$, in cui la velocità è nulla, si osserva che l'accelerazione centripeta varia nel tempo secondo la legge $a_r(t) = -ct^2$, dove $c = 0.38$ m s⁻⁴. Calcolare l'espressione dell'accelerazione tangenziale a_θ .



SOLUZIONE

Per un punto materiale che si muove su una circonferenza

$$r(t) = R = \text{const} \quad (1)$$

la formula dell'accelerazione vale:

$$\vec{a} = \underbrace{-R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}_{\text{accel. radiale (centripeta) } a_r} \vec{u}_r + \underbrace{R \frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\text{accel. tangenziale } a_\theta} \vec{u}_\theta \quad (2)$$

o anche, utilizzando le solite notazioni

$$\begin{aligned} \omega &\doteq \frac{d\theta}{dt} \\ \alpha &\doteq \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

otteniamo

$$\vec{a} = \underbrace{-\omega^2(t) R}_{\text{accel. radiale } a_r} \vec{u}_r + \underbrace{\alpha(t) R}_{\text{accel. tangenziale } a_\theta} \vec{u}_\theta \quad (3)$$

D'altra parte, dal testo del problema sappiamo che $a_r(t) = -ct^2$. Dunque dall'espressione per a_r presente nella (2) abbiamo

$$-ct^2 = -\omega^2(t) R \quad (4)$$

da cui

$$\omega^2(t) = \frac{c}{R} t^2 \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \pm \sqrt{\frac{c}{R}} t \quad (5)$$

Siccome sappiamo che il moto avviene in senso antiorario, la velocità angolare ω è non negativa, e scegliamo la soluzione col '+'

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{c}{R}} t \quad (6)$$

da cui ricaviamo che l'accelerazione angolare vale

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{c}{R}} \quad (7)$$

e notiamo che risulta costante nel tempo.

Dall'espressione della (2) per l'accelerazione tangenziale a_θ otteniamo allora

$$a_\theta = \alpha R = R \sqrt{\frac{c}{R}} = \sqrt{Rc} \quad (8)$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} a_\theta &= \sqrt{0.15 \text{ m} \cdot 0.38 \text{ m s}^{-4}} = \\ &= \sqrt{0.15 \cdot 0.38} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 0.24 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned} \quad (9)$$